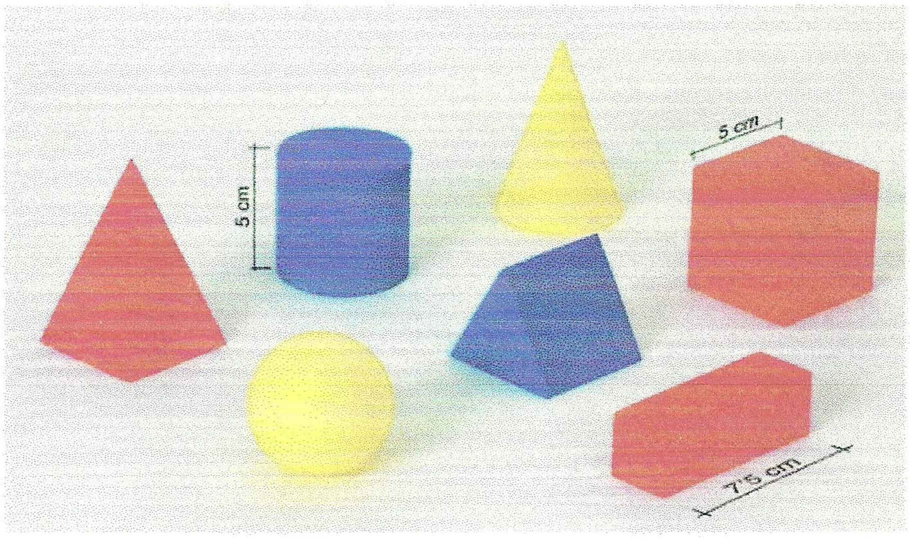
ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS



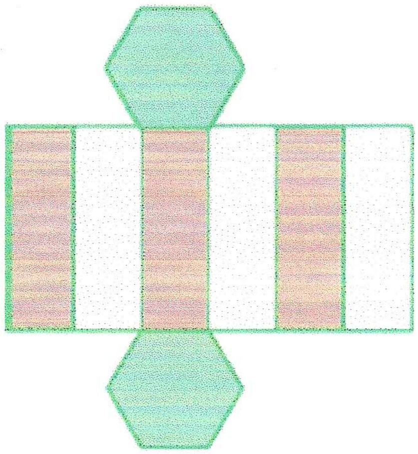
I.E.S. MAESTRO JUAN DE ÁVILA – 4º A

- ISMAEL MENA MUÑOZ
- ENCARNACIÓN MORENO CAÑAS
- CRISTOBAL RAMOS RODRÍGUEZ
- ROBERTO CARLOS SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

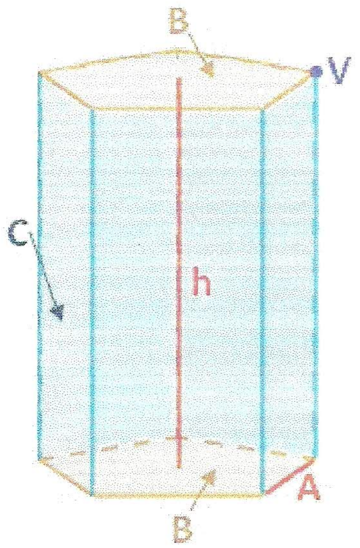
PRISMAS

Los prismas son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales llamadas bases y sus caras laterales son paralelogramos.

Desarrollo de un prisma



Elementos del prisma



En un prisma se pueden diferenciar los siguientes elementos:

- **Bases** (*B*): Cada prisma tiene dos bases, siendo ambas iguales y paralelas.
- **Caras** (*C*): Los paralelogramos de los laterales y las bases.
- **Altura** (*h*): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.
- **Vértices** (*V*): puntos donde confluyen las caras del prisma.

- **Aristas** (*A*): cada uno de los lados de las caras.

  Por el teorema de Euler, se puede saber el número de aristas (A) sabiendo el número de caras (*C*) y de vértices (*V*).

$$A = C + V - 2$$

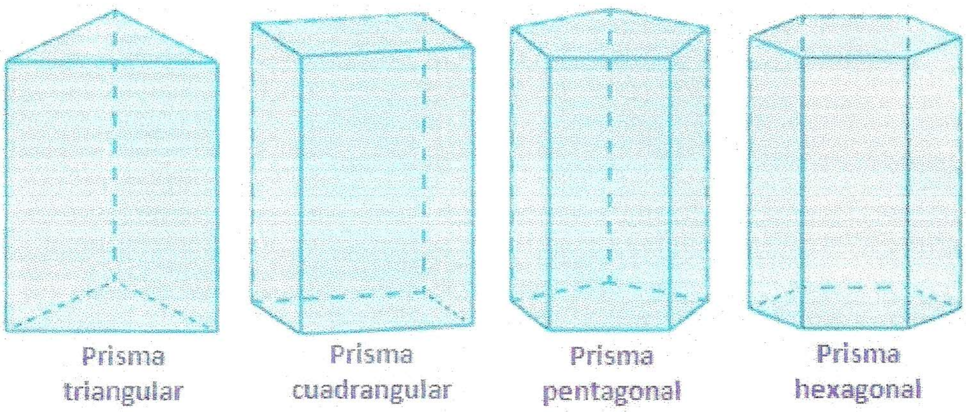
Tipos de prismas

Los prismas se pueden clasificar de acuerdo a cuatro criterios:

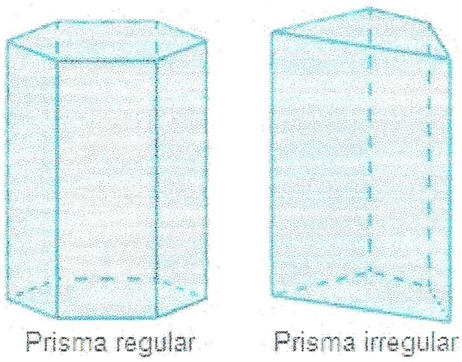
Número de lados de la base

Los prismas se pueden clasificar según el número de lados que tienen sus bases:

- **Prisma triangular**: las bases son triángulos (3 lados).
- **Prisma cuadrangular**: las bases son cuadriláteros (4 lados).
- **Prisma pentagonal**: las bases son pentágonos (5 lados).
- **Prisma hexagonal**: las bases son hexágonos (6 lados).

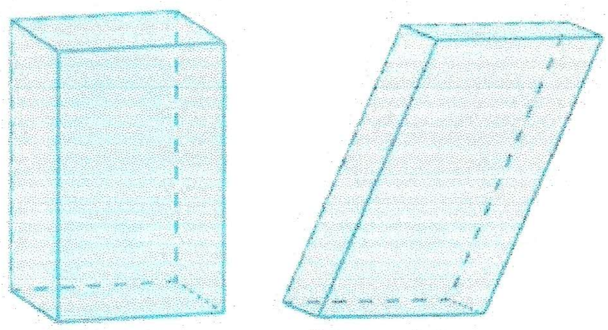


Regular o irregular



- **Prisma regular**: un prisma es regular si sus bases son polígonos regulares.
- **Prisma irregular**: los prismas son irregulares si tienen polígonos irregulares en su base.

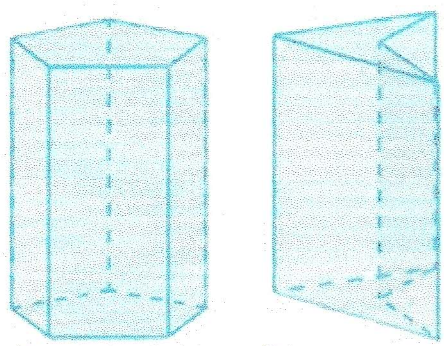
Recto u oblicuo



Prisma recto Prisma oblicuo

- **Prisma recto**: si los ejes de los polígonos de las bases son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son cuadrados o rectángulos.
- **Prisma oblicuo**: es aquel cuyos ejes de los polígonos de las bases se unen por una recta oblicua a las bases mismas.

Convexo o cóncavo:



Prisma convexo Prisma concavo

- **Prisma convexo**: el prisma es convexo si sus bases son polígonos convexos.
- **Prisma cóncavo**: el prisma cóncavo tiene como bases dos polígonos cóncavos iguales.

Área de la base

Área del polígono de la base

Área lateral

$P_B = \text{Perimetro de la base}$

$A_L = P_B \cdot h$

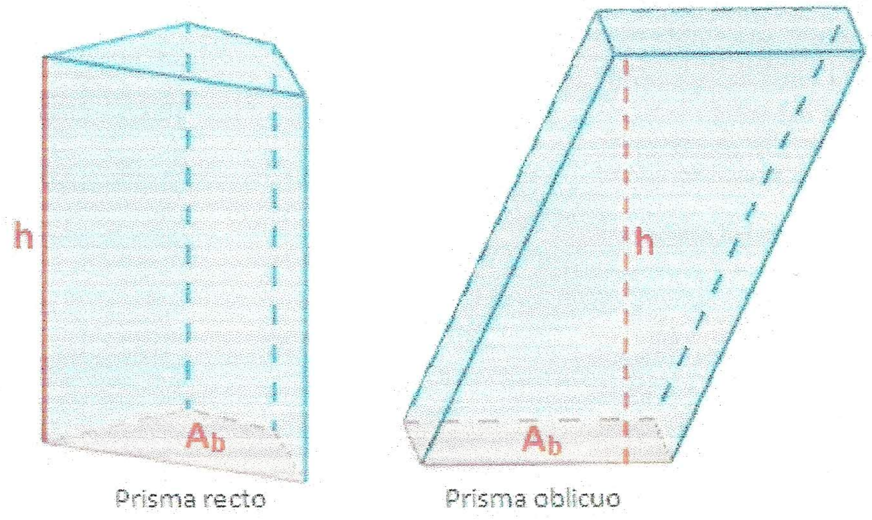
Área total

El área de un prisma es la suma del área de las dos bases (A_b) más el área de los paralelogramos de las caras laterales

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

Volumen

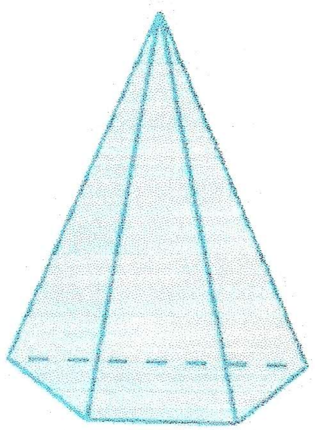
El volumen del prisma es el producto del área de la base (A_b) por la altura del prisma (*h*). En un prisma recto la altura coincide con una altura lateral, mientras que en un prisma oblicuo no.



$V = A_B \cdot h$ Donde *h* es la altura del poliedro.

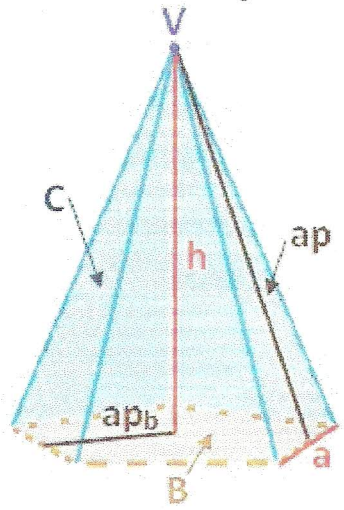
PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro cuya superficie está formada por una base que es un polígono cualquiera y caras laterales triangulares que confluyen en un vértice que se denomina ápice (o vértice de la pirámide). Las pirámides tienen tantos triángulos en las caras laterales como lados tiene la base.



Elementos de la pirámide

En una pirámide se pueden diferenciar los siguientes elementos:



- **Base** (*B*): polígono cualquiera. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.
- **Caras** (*C*): los triángulos de los laterales y la base.
- **Aristas** (*a*): segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir: aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base.
- **Altura** (*h*): distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.

- **Vértice de la pirámide** (*V*): punto donde confluyen, se unen las caras laterales triangulares. También se llama ápice.
- **Apotema de la pirámide** (*ap*): distancia del vértice a un lado de la base. Solo existe en las pirámides regulares.
- **Apotema de la base** (ap_b): distancia de un lado de la base al centro de ésta. Solo existe en las pirámides regulares.

Tipos de pirámides

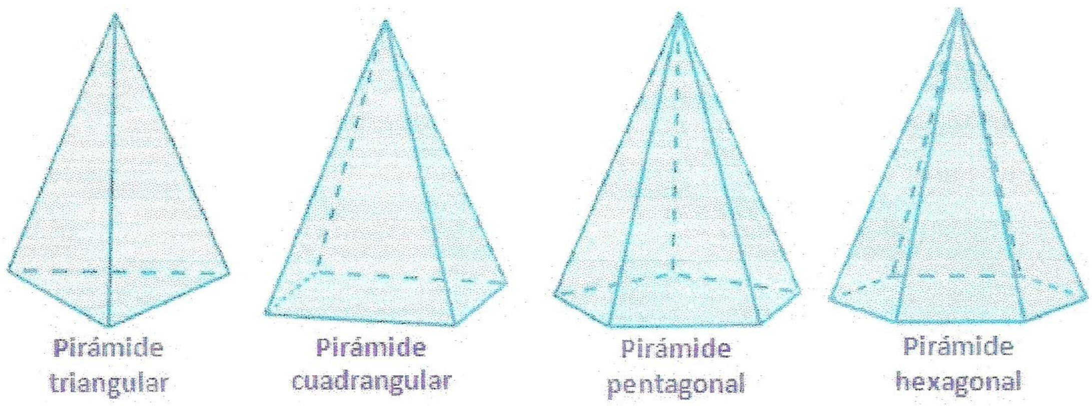
Las pirámides se pueden clasificar mediante cuatro criterios:

Número de lados de la base

Las **pirámides** se pueden clasificar según el **número de lados** que tiene su **base**:

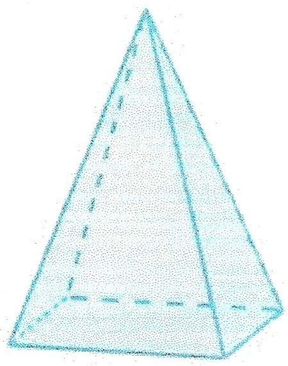
- **Pirámide triangular**: la base es un triángulo (3 lados).
- **Pirámide cuadrangular**: la base es un cuadrilátero (4 lados).
- **Pirámide pentagonal**: la base es un pentágono (5 lados).
- **Pirámide hexagonal**: la base es un hexágono (6 lados).

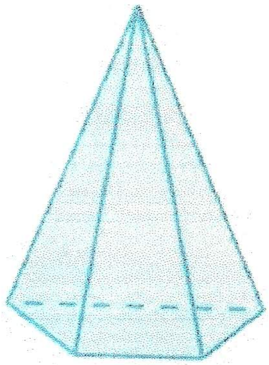
...



Regular o irregular

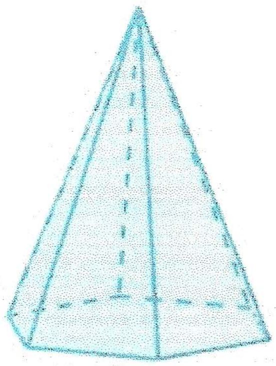
- **Pirámide regular**: una pirámide es regular si la base es un polígono regular y a su vez es una pirámide recta. Las caras laterales son triángulos isósceles e iguales entre sí.
- **Pirámide irregular**: cuando la base es un polígono irregular o bien es una pirámide oblicua.

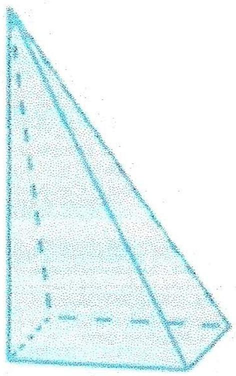

Pirámide regular


Pirámide irregular

Recta u oblicua

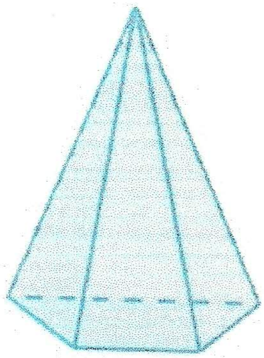
- **Pirámide recta**: la pirámide es recta cuando todas sus caras laterales son triángulos isósceles. En este caso, la recta perpendicular a la base que pasa por el vértice de la pirámide corta a la base por el centro del polígono.
- **Pirámide oblicua**: la pirámide es oblicua cuando no todos los triángulos laterales son isósceles.


Pirámide recta

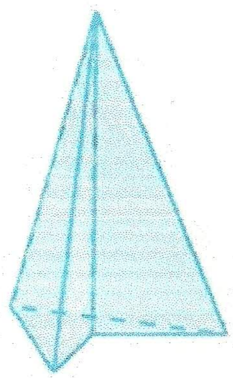

Pirámide oblicua

Convexa o cóncava

- **Pirámide convexa**: la pirámide es convexa si la base es un polígono convexo.
- **Pirámide cóncava**: la pirámide es cóncava si el polígono de la base es cóncavo.



Pirámide convexa



Pirámide concava

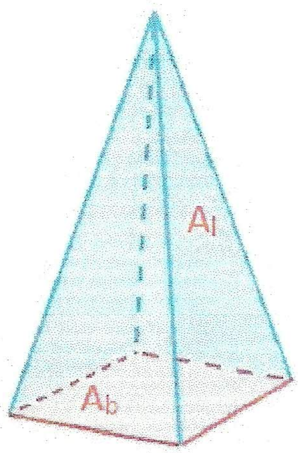
Área de la base (A_b)

Área del polígono de la base

Área lateral(A_l)

Suma de las áreas de las caras laterales

Área total de la pirámide



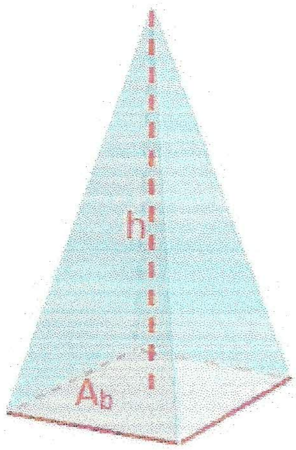
La suma del área de la base (A_b) y el área de los triángulos de las caras laterales (A_l).

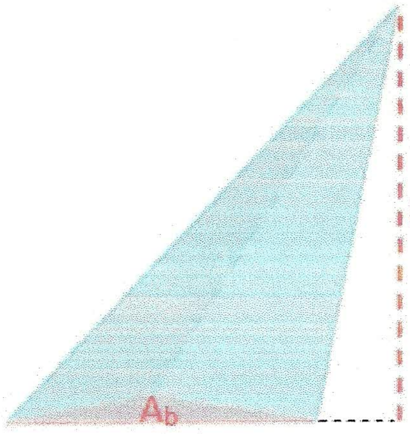
$$\acute{A}rea = A_b + A_l$$

Volumen de la pirámide

El volumen de la pirámide es un tercio del área de la base de la pirámide (A_b) y su altura (h).

$$Volumen = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

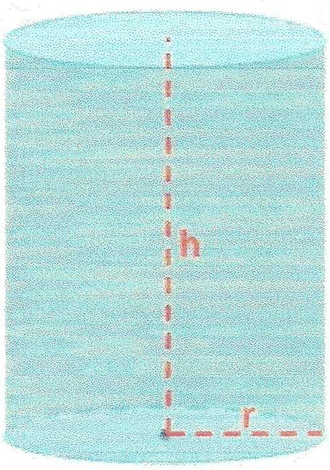




CILINDRO

El cilindro circular es la figura tridimensional que se forma cuando una recta, llamada generatriz, gira alrededor de otra recta que queda fija, llamada eje.

Área del cilindro



El área del cilindro es la suma del área de las dos bases circulares más el área lateral.

El área de la base es la del círculo de la base

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

El área lateral de un cilindro es el producto de la altura por la longitud de la circunferencia de la base.

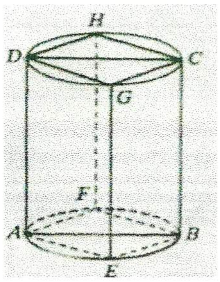
$$A_l = 2.\pi.r.h$$

Área total

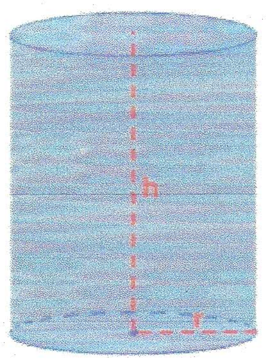
$$Área = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

Volumen del cilindro

Para calcular el volumen de un cilindro, consideramos un prisma inscrito en el cilindro, es decir, que tenga por bases polígonos inscritos en los círculos de las bases del cilindro, y por altura la misma que el cilindro.



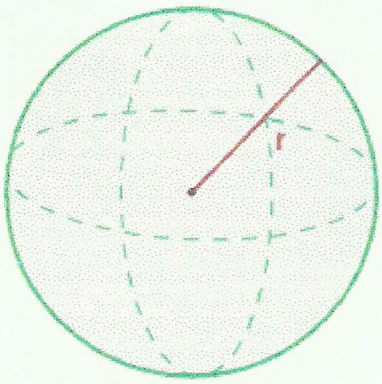
Al aumentar el número de lados del polígono base del prisma, aumenta el número de caras de éste, y el volumen del prisma será cada vez más próximo al del cilindro.



El **volumen del cilindro** es:

$$Volumen = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

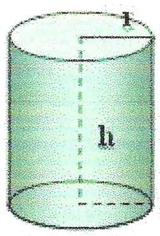
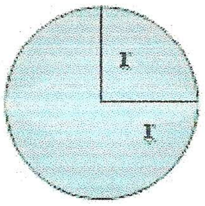
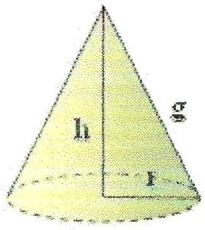
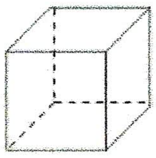
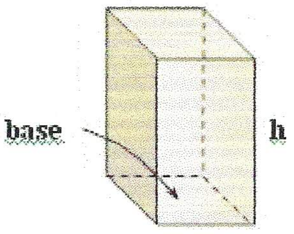
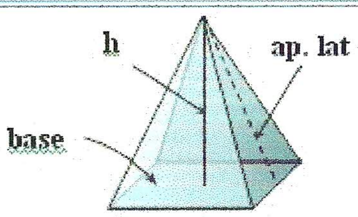
Área y volumen de la esfera



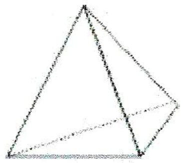
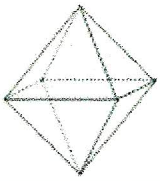
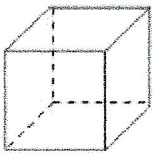
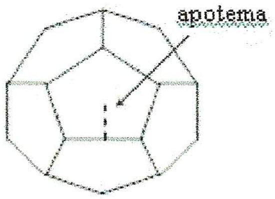
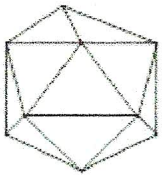
$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

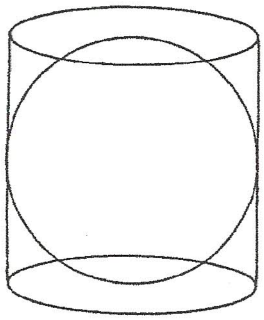
Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6\ a^2$	$V = a^3$
Prisma		**A = (perim. base • h) + 2 • area base**	**V = área base x h**
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

Poliedros regulares

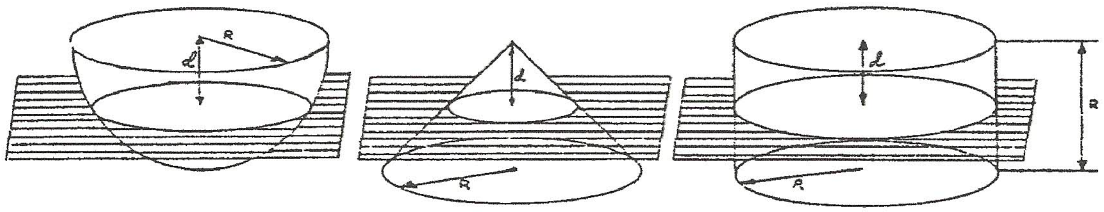
Figura	Esquema	Nº de caras	Área
Tetraedro		4 caras, triángulos equiláteros	$A = a^2 \cdot \sqrt{3}$
Octaedro		8 caras, triángulos equiláteros	$A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$
Cubo		6 caras, cuadrados	$A = 6\,a^2$
Dodecaedro		12 caras, pentágonos regulares	$A = 30 \cdot a \cdot ap.$
Icosaedro		20 caras, triángulos equiláteros	$A = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$

ARQUÍMEDES Y EL VOLUMEN DE LA ESFERA

El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquímedes más estimaba de todos los muchísimos que hizo en su vida. Llegó a demostrar de un modo muy original que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella

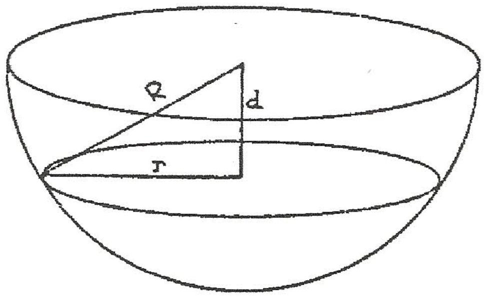


Arquímedes se imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Algo así

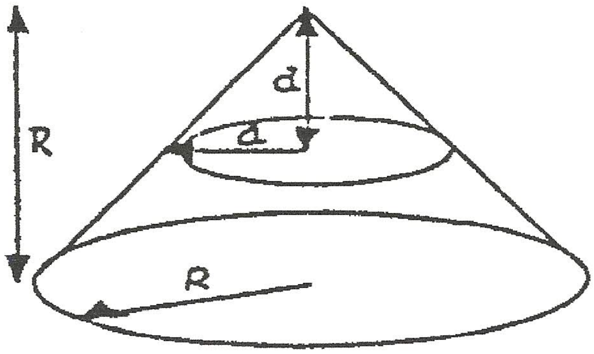


Arquímedes cortó las tres figuras por un plano paralelo a la base del cilindro y cono y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en cilindro, semiesfera y cono.

En el cilindro está claro: un círculo de radio R. En la esfera también será un círculo, pero su radio dependerá de la distancia d. Mirando la figura siguiente y acordándote del teorema de Pitágoras, fácilmente puedes escribir que si el radio de la sección es r, entonces $r^2 + d^2 = R^2$



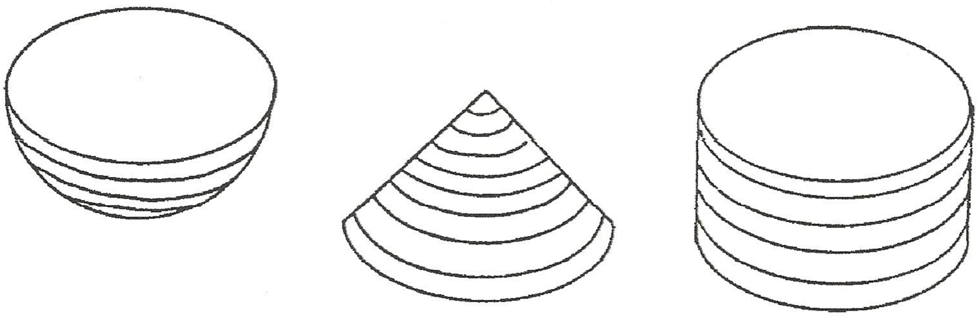
En el cono la sección también será un círculo y ahora el radio es aún más fácil de determinar mirando a la figura siguiente



Como el radio de apertura del cono es de 45º, resulta que el radio es d. Así

Sección cilindro = $\pi R^2 = \pi(r^2 + d^2) = \pi r^2 + \pi d^2$ =Sección semiesfera + Sección cono

Las secciones son como rebanadas de las tres figuras obtenidas cortando paralelamente a la base del cilindro. Resulta que, colocando las tres figuras como las hemos puesto y cortándolas en rebanadas finas tendremos:



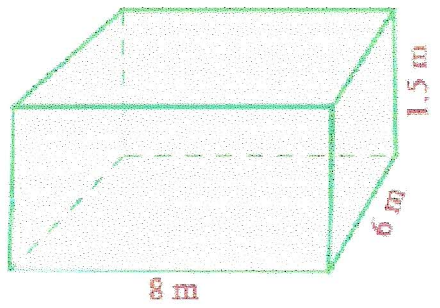
Rebanada en cilindro a altura d = Rebanada en semiesfera + Rebanada en cono. Si para cada altura d se tiene esta relación, parece bastante claro que *Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono*

Pero, como Arquímedes muy bien sabía, Volumen cilindro= πR^3; Volumen cono= $\pi R^3/3$ y así resultaba Volumen semiesfera = $2\pi R^3/3$ y Volumen esfera = $4\pi R^3/3$.

La esfera puede considerarse como compuesta por un montón de pirámides de vértice el centro de la esfera y base de área muy pequeña S sobre la esfera. Esto da una idea de lo que puede valer el área de la superficie esférica. El volumen de la esfera es **$4\pi R^3/3$**. El de cada pirámide será RS/3.

EJERCICIOS RESUELTOS:

1.- Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.



1º.- ¿Cuánto costará pintarla?

$$A = 8 \cdot 6 + 2 \cdot (8 \cdot 1.5) + 2 \cdot (6 \cdot 1.5) = 90\ m^2$$

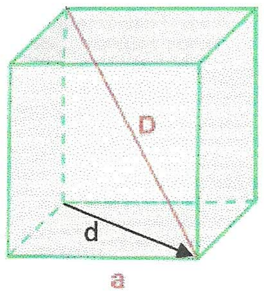
$$90\ m^2 \cdot 6 \frac{€}{m^2} = 540\ €$$

2º.- ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

$V = A_{base} \times h$ $\qquad$ $1\ m^3 = 1000\ l.$

$$V = 8 \cdot 6 \cdot 1.5 = 72 m^3 \cdot 1000 = 72000\ l$$

2.- Calcular la diagonal, el área lateral, el área total y el volumen de un cubo de 5 cm de arista.



a = 5 cm

1º.- Diagonal D?

$d = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt[2]{50}$

$D = \sqrt{5^2 + \sqrt[2]{50}^{\,2}} = \sqrt[2]{75} = 8{,}66\ cm.$

2º.- Área lateral
$A_L = 4 \cdot l^2$
$$A_L = 4 \cdot 5^2 = 100\ cm^2$$

3º.- Área Total
$A_T = 6 \cdot l^2$
$$A_T = 6 \cdot 5^2 = 150\ cm^2$$

4º.- Volumen
$V = A_{base} \cdot h. = l^2 \cdot l = l^3$
$$V = 5^3 = 125\ cm^3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Una tienda de campaña tiene forma de cono recto; el radio de la base mide 1,5 m y la altura es de 3 m. El metro cuadrado de suelo cuesta 15 €, y el resto, 7 € el metro cuadrado. ¿Cuánto cuesta el material para construirla?

2.- El depósito de gasoil de un sistema de calefacción tiene forma de ortoedro, cuyas dimensiones en metros son 1,5 m × 0,75 m × 1,8 m. Calcula cuánto cuesta llenarlo si cada litro de gasoil cuesta 0,55 €. Si la calefacción consume uniformemente todo el gasoil en 120 días, ¿cuánto se gasta diariamente en calefacción?