UNIDAD 2: DETERMINANTES

1.- Introducción

Históricamente se estudiaron antes los determinantes que las matrices. Son una buena herramienta para trabajar con muchos datos. Grandes matemáticos se dedicaron a su estudio (Gauss, Cramer, Lagrange, Laplace, Cauchy, etc).

2.- Determinantes de orden 2 y 3

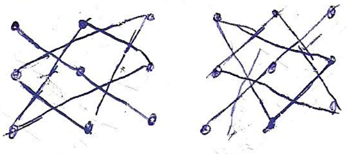
A las matrices cuadradas les podemos asignar un <u>número</u>, que llamaremos <u>determinante</u>, y que aparecerá en el estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo de la matriz inversa, etc.

Diagonal principal — Diagonal secundaria

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$

Orden 3 $\Rightarrow$ Emplearemos la regla de Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$



\+ −

3.- Desarrollo de un determinante por Adjuntos

A) <u>Menor complementario</u>: Dada una matriz cuadrada n, $A = (a_{ij})$, llamamos <u>menor complementario</u> del elemento a_{ij}, que llamaremos α_{ij}, al determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

B) <u>Adjunto y Matriz adjunta</u>

Dada una matriz cuadrada n, $A = (a_{ij})$ se llama <u>adjunto</u> del elemento a_{ij}, que llamaremos A_{ij}, al producto del menor complementario por una potencia de base (-1) y de exponente la suma de la fila y la columna $(i+j)$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{si } i+j = \text{par} \rightarrow (-1)^{i+j} = +1 \\ \rightarrow \text{si } i+j = \text{impar} \rightarrow (-1)^{i+j} = -1 \end{array}$$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de una matriz cuadrada A se llama <u>matriz adjunta de A</u> y se denota $Adj(A)$.

C) <u>Desarrollo de un determinante por adjuntos</u>

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos respectivos.

$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$ (si cogemos una fila cualquiera)

ó

$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (si cogemos una columna cualquiera).

Por tanto, a la hora de elegir fila o columna, conviene elegir aquella que contenga el mayor número de ceros.

4.- Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Sean F_i y C_j una fila o columna cualquiera de la matriz. Podemos escribir:

(fila o columna = LÍNEA)

$$|A| = det(A) = det(F_1, F_2, \cdots F_n) = det(C_1, C_2, \cdots C_n).$$

Dicho esto, algunas de las propiedades son:

(A) El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta.

$$\boxed{det(A) = det(A^t)}$$

*(B) Si los elementos de una línea de un determinante queda multiplicados por un nº, el valor del nº determinante será igual que el determinante primero multiplicado por dicho número.

$$\boxed{\begin{array}{l} det(F_1, F_2, F_3, \cdots F_n) = t \\ det(kF_1, kF_2, k_3F_3 \cdots kF_n) = kt \end{array}}$$

⇒ Con esta prop podemos sacar factor común:

Ej: $\begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 3 & 60 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

$2\cdot 60 - 3\cdot 40 = 0 \qquad 20\cdot(2\cdot 3 - 3\cdot 2) = 0$

(C) Si los elementos de una línea de un determinante se pueden descomponer en sumandos (2), su determinante es igual a la suma de 2 determinantes que tienen iguales todas las líneas excepto dicha línea cuyos sumandos pasan, respectivamente a cada uno de los determinantes:

$$\boxed{det(F_1, F_2, \cdots, F_i + F_i', \cdots F_n) = det(F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots, F_n) + det(F_1, F_2, \cdots, F_i', \cdots, F_n)}$$

Ej $\begin{vmatrix} 1 & 2+5 & 3 \\ 2 & -1+3 & 2 \\ 5 & 3-7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 4 \end{vmatrix}$

(D) El determinante de un producto de matrices, es igual al producto de los determinantes de cada matriz.

$$\boxed{det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)}$$

(E) Si en una matriz cuadrada se permutan 2 líneas, su determinante cambia de signo:

$$\boxed{det(F_1, \cdots, F_i, \cdots, F_j, \cdots F_n) = -det(F_1, \cdots, F_j, \cdots F_i, \cdots F_n)}$$

(F) Si una matriz cuadrada tiene 2 líneas iguales o proporcionales, su determinante es 0.

(G) Si los elementos de una línea de una matriz cuadrada son combinación lineal de las restantes (resultado de sumar los elementos de otras líneas multiplicados por nºs reales), su determinante es 0.

*(H) Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se le suma una CL de otras líneas su determinante no varía.

$det(F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots F_n) = det(F_1, F_2, \cdots, aF_1 + bF_2 + \cdots, F_n)$ ⇒ Si una matriz tiene una línea de ceros, su determinante es nulo.

Basándonos principalmente en (B) y (H) para hacer ceros y el hecho del cálculo de un determinante por adjuntos, nos permiten calcular determinantes de forma más sencilla ⇒ Haciendo cero el mayor número de elementos de una línea (Método de CHIO).

5.- Cálculo de la matriz inversa por determinantes

$\exists A^{-1}$ (A regular) ⇔ $\boxed{|A| \neq 0}$ → $\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}}$ ó $\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}$

Propiedades:

1.- Si $\exists A^{-1}$, es única
2.- $(A^{-1})^{-1} = A$
3.- $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$
4.- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

6.- Cálculo del rango de una matriz por determinantes

Se llama menor de orden K de $A_{m\times n}$ al determinante de orden K que está formado por los elementos que pertenecen a K filas y a K columnas de A.

El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo que podemos obtener de esta matriz.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$ son:

a) 1 y 2 b) −2 y 2 c) −1 y −2

2. El valor del determinante $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ es:

a) $m^3 + 3m - 2$ b) $m^2 + 2m - 3$ c) $m^3 - 3m + 2$

3. Las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & x-1 \\ 9 & x^2 & (x-1)^2 \end{vmatrix} = 0$ son:

a) 3 y 4 b) −3 y −4 c) 0 y 2

4. Dadas las matrices A y B de orden 3 con $\det(A) = 4$ y $\det(B) = 6$, el valor de $\det\left[(A^{-1} \cdot B^2)^t\right]$ es:

a) −6 b) 9 c) −24

5. La matriz adjunta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. La matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la solución de la ecuación matricial $B + X \cdot A = I$ es:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

8. La matriz X que cumple $AX + B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

9. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el valor de a para que el rango sea 2 es:

a) 1 b) −1 c) −2

10. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

18. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

19. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Halla A^2.

b) Resuelve la ecuación $A^2 \cdot X + A \cdot B = B$.

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$:

a) Calcula los valores de k para los cuales no existe la inversa de A.

b) Para $k = 3$, calcula la inversa de A.

21. De una matriz X cuadrada se sabe que $|X| = 3$ y $|2 \cdot X| = 48$. Halla el orden de la matriz X y $|X^{-1}|$.

22. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

b) Utilizando el resultado anterior, calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

23. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Sean las matrices A y B de orden 4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$. Calcula $|A^{-1}|$; $|B^t \cdot A|$; $|(A \cdot B^{-1})^t|$.

25. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

26. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a. Halla, si existe, la matriz inversa de A en los casos en que $a = 0$ y $a = 1$.

RESOLUCION AUTOEVALUACION DETERMINANTES

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow 4x^2 - 6 = 10 \;;\; 4x^2 = 16 \;;\; x^2 = 4 \;;\; x = \pm\sqrt{4} = \boxed{\pm 2 \rightarrow b}$

2) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 2 - (m + m + m) = \boxed{m^2 - 3m + 2 \rightarrow c}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & x-1 \\ 9 & x^2 & (x-1)^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 + 3x^2 + 9(x-1) - \left[9x + 3(x-1)^2 + x^2(x-1)\right] = 0$

$\cancel{x^3} - 2x^2 + x + 3x^2 + 9x - 9 - 9x - 3x^2 + 6x - 3 - \cancel{x^3} + x^2 = 0$

$-x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot(-1)\cdot(-12)}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-7 \pm 1}{-2} \boxed{\begin{matrix} x = 4 \\ x = 3 \end{matrix} \rightarrow a}$

4) $\det A = 4$
$\det B = 6$

$\det\left[(A^{-1}\cdot B^2)^t\right] = \det(A^{-1}\cdot B^2) = \det A^{-1} \cdot \det B^2 = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det B \cdot \det B =$

$\dfrac{1}{4} \cdot 6 \cdot 6 = \boxed{9 \rightarrow b}$

5.– $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -(-3) \\ -(-2) & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c}$

6.– A^{-1} de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$A_{11} = +(4-9)$ $\quad A_{12} = -(4-6)$ $\quad A_{13} = +(6-4)$
$A_{21} = -(2-3)$ $\quad A_{22} = +(2-2)$ $\quad A_{23} = -(3-2)$
$A_{31} = +(3-2)$ $\quad A_{32} = -(3-2)$ $\quad A_{33} = +(2-2)$

$(Adj\,A)^t = Adj\,(A^t) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = |A| = 4 + 6 + 6 - (4 + 9 + 4) = 16 - 17 = -1$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a}$

7.– $B + XA = I \;;\; XA = I - B \;;\; XA\cdot A^{-1} = (I - B)\cdot A^{-1} \;;\; X = (I - B)\cdot A^{-1}$

$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;;\; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \;;\; |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 9/2 & -3 + 3/2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow b}$

8.- $Ax + B = C$; $AX = C - B$; $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C-B)$; $X = A^{-1} \cdot (C-B)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$

$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ → Ninguna, salvo que se cambie el signo a la a, o el a_{23} de c sea 0.

9.- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar a para que $R = 2$

$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = 0$

$-a^3 + 3a - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 0 & 3 & -2 \\
1 & & -1 & -1 & 2 \\
\hline
 & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \\
1 & & -1 & -2 & \\
\hline
 & -1 & -2 & \lfloor 0 & \\
-2 & & 2 & & \\
\hline
 & -1 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

· Posibles ~~por~~ soluciones $\begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$; $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ → Rango 1, ya que los det. de orden 2 son 0

$a = -2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ → $\boxed{\text{Rango 2} \rightarrow c}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

10.- Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & +5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ → Máximo puede ser 3.

$$\begin{array}{l} \\ 3F_1 + F_2 \\ 5F_1 + F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 10 & -14 & -11 \end{pmatrix} \; -2F_2 + F_3 \; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{rango } 3. \rightarrow c}$$

Comprobamos : $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 24 + 10 - (-15 + 16 + 4) = -10 - 5 \neq 0$

EJERCICIOS RESUELTOS DETERMINANTES (ACCESO UNIVERSIDAD)

18

a) $\begin{vmatrix}3&x&x&x\\x&3&x&x\\x&x&3&x\\x&x&x&3\end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&x&x\\x&3&x\\x&x&3\end{vmatrix} + x(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}x&x&x\\x&3&x\\x&x&3\end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{(1+3)}\cdot\begin{vmatrix}x&3&x\\x&x&x\\x&x&3\end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{(1+4)}\cdot\begin{vmatrix}x&3&x\\x&x&3\\x&x&x\end{vmatrix}=$

$= 3\cdot\left(27+x^3+x^3-(3x^2+3x^2+3x^2)\right) - x\cdot\left(9x+x^3+x^3-(3x^2+3x^2+x^3)\right) + x\cdot\left(3x^2+x^3+3x^2-(x^3+9x+x^3)\right)$

$-x\cdot\left(x^3+x^3+9x-(x^3+3x^2+3x^2)\right) = 3\cdot\left(2x^3-9x^2+27\right) - x\cdot\left(x^3-6x^2+9x\right) + x\cdot\left(-x^3+6x^2-9x\right)$

$-x\cdot\left(x^3-6x^2+9x\right)) = 6x^3-27x^2+81-x^4+6x^3-9x^2-x^4+6x^3-9x^2-x^4+6x^3-9x^2=$

$=\boxed{-3x^4+24x^3-54x^2+81}$

b) $\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} = 1\cdot\left(0+0+0-(1+0+0)\right) - 1\cdot\left(1+0+0-(0+0+0)\right)$

$=-1-1=\boxed{-2}$

c) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&0\\3&3&0&0\\4&4&3&1\end{vmatrix} = 0 \quad (C_1=C_2)$

d) $\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0\end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a&c&b\\b&0&a\\c&a&0\end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a&0&b\\b&c&a\\c&b&0\end{vmatrix}$

$+c(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}a&0&c\\b&c&0\\c&b&a\end{vmatrix} = -a\left(b^2a+c^2a-a^3\right)+b\left(b^3-(c^2b+a^2b)\right)-c\left(a^2c+b^2c-c^3\right)=$

$\boxed{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}$

19

$A^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^2=I$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

b) $A^2X+A\cdot B=B$; $IX+A\cdot B=B$

$X=B-A\cdot B$

$X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$

20

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\k&1&1\\k&1&k\end{pmatrix}$. Para que no exista A^{-1}, $|A|=0$; $\begin{vmatrix}1&0&1\\k&1&1\\k&1&k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow k+k+0-(k+0+1)=0$

$2k-k-1=0$; $k-1=0$

$k=1$ (las filas 2 y 3 serían iguales).

b) $k=3 \rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&1\\3&1&3\end{pmatrix}$; ¿A^{-1}? $\quad A^t=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix} \rightarrow |A^t|=\begin{vmatrix}1&3&3\\0&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=3+0+3-(3+0+1)=2$

$(-1)^{1+1}$

$Adj(A^t)=\begin{pmatrix}+(3-1)&-(0-1)&+(0-1)\\-(9-3)&+(3-3)&-(1-3)\\+(3-3)&-(1-0)&+(1-0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-6&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2&-1/2\\-3&0&1\\0&-1/2&1/2\end{pmatrix}}$

21

$|X|=3$

$|2\cdot X|=48$

Supongamos de orden 2 → $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=3$

$2\cdot X=\begin{pmatrix}2a&2b\\2c&2d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}2a&2b\\2c&2d\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot3=12\neq48$

Orden 3 → $2\cdot X=2\cdot2\cdot2\cdot3=24$ (NO) ; $\boxed{\text{Orden 4:}}$ $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=48$ → Sí

Por propiedades

$|X^{-1}|=\dfrac{1}{|X|}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

22) Probar que $A^{-1} = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad |A^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - (0+0+0) = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +(0-0) & -(0-1) & +(0-0) \\ -(0-0) & +(0-0) & -(0-1) \\ +(1-0) & -(0-0) & +(0-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

$$(A^t \cdot A)^{1999} = (A^{-1} \cdot A)^{1999} = I^{1999} = \boxed{I}$$

23) $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow \overset{I}{A^{-1}A} \cdot X \cdot \overset{I}{B \cdot B^{-1}} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$; $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad |A^t| = -1 - 0 = -1 \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} +1 & -0 \\ -0 & +(-1) \end{pmatrix} ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; \quad |B^t| = 6 - 5 = 1 ; \quad \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} +3 & -5 \\ -1 & +2 \end{pmatrix} ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

24) $|A| = 3$, $|B| = 2$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \boxed{\frac{1}{3}} ; \quad |B^t \cdot A| = |B^t| \cdot |A| = |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$$

$$|(A \cdot B^{-1})^t| = |A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot 1/|B| = \frac{|A|}{|B|} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

25)

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix} = 0 \text{ si } a = 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{\text{Sí, porque } F_1 + F_2 = F_3}$$

26) a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según a; Según lo visto, puede ser 2 ó 3 (o incluso 1).

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 2 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2a^2-2)a^2 + 0 + (a^2-1)(2a-1) - \left(a \cdot (2a^2-2) + 0 + a^2(a^2-1)\right) = 0$$

$$2a^4 - 2a^2 + \cancel{2a^3} - a^2 - \cancel{2a} + 1 - \cancel{2a^3} + \cancel{2a} - a^4 + a^2 = 0$$

$a^4 - 2a + 1 = 0 \rightarrow$ Ec. Bicuadrada. Haciendo cambio $a^2 = y \rightarrow a = \pm\sqrt{y}$

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \text{ (doble)} \rightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$ Rango 1 (Todos los menores de orden 2 son 0) ; Si $a = -1$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$ Rango 2 ; $a \neq \pm 1 \rightarrow$ Rango 3

Si $a = 1 \rightarrow$ No tiene inversa ; $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A^t| = 0 + 1 + 0 - (0+0+0) = 1$

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} +(0-0) & -(0-(0)) & +(1-(0)) \\ -(0-(-1)) & +(0-0) & -(-1-0) \\ +(0-(-2)) & -(0-(-1)) & +(-2-(-1)) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$