LIMITES

1.- Calcula $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ de las siguientes funciones: a) $f(x) = x+1$ b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \leq 1 \\ 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2.- Dibuja la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x-3 & \text{si } 4 < x < 6 \\ |x-10| & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$ y halla los siguientes límites

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim_{x \to 4} f(x)$

e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3.- Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} (5x^3 + 3x^2 - 3)$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^3-3}$ c) $\lim_{x \to 0} (x^3+5)^{(x^3+5)}$ d) $\lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2-9})$

e) $\lim_{x \to 1} (\sqrt{x^2-10}$ f) $\lim_{x \to \infty} (-2x^3+3)$ g) $\lim_{x \to -\infty} 2^{(-x+5)}$ h) $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x}$

4.- Determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 5} \frac{3}{(x-5)^2}$ b) $\lim_{x \to 4} \frac{4}{(x-4)^3}$ c) $\lim_{x \to -3} \frac{4x^2+5}{x^3+8x^2+x-42}$

5.- Determina los límites de las siguientes indeterminaciones:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x+5}{-x^2+3}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-7x^4-2x}{9x^4+5x^3-2}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2-7x}}$ d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^4-2}$

e) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-12x+32}{x^2+x-20}$ f) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-10x-8}$ g) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ h) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^3-x^2-16x+16}$

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+7}+1}$ j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5-2}}{x^2+1}$ k) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-7}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-7}}$ l) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2-3x} - \frac{x^2+7}{x-2} \right)$

m) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3})$ n) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{x+1} - \frac{x^2}{x+6} \right)$ ñ) $\lim_{x \to 0} \left(3x \cdot \frac{5x}{\sqrt{x}} \right)$

6.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto de ellas:

a) $f(x) = \frac{x^2-3}{(x+5)(x-1)}$ b) $f(x) = \frac{x^3-2}{(x-4)(x+1)}$ c) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-6x+5}$ d) $f(x) = \frac{3x}{x^2-x-12}$

e) $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{9-x^2}$ f) $f(x) = \frac{-x^2+3x+2}{x^2-6x+9}$ g) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ h) $f(x) = \frac{x^2+4x-21}{3x^2-24x+45}$

7.- Hallar los valores de a y b, para que sea continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x-5 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

LIMITES (SOLUCIÓN)

1) a) $f(x) = x+1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1+1 = \boxed{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1+1 = \boxed{2}$

b) $f(x) = x^2-4$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2-4 = \boxed{-3}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1^2-4 = \boxed{-3}$

Son continuas por lo que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} x+6 & si\ x \le 1 \\ 7 & si\ x > 1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1+6 = \boxed{7}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \boxed{7}$

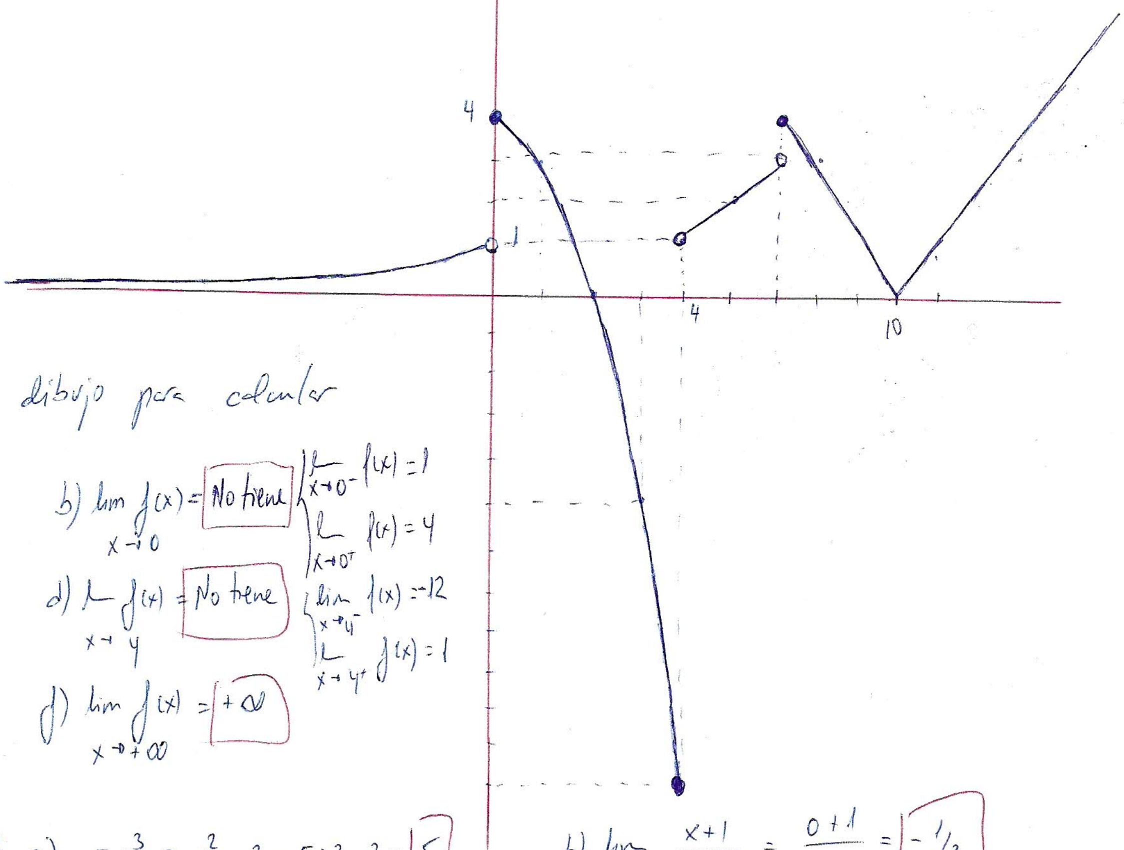
d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x < 1 \\ 2x & si\ x > 1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = \boxed{-\infty}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\cdot 1 = \boxed{2}$

e) $f(x) = \begin{cases} \ln x & si\ x \le 1 \\ e^x & si\ x > 1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln 1 = \boxed{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = e^1 = \boxed{e}$

2)

x	y
-4	$e^{-4} = 0'018$
-3	$e^{-3} = 0'05$
-2	0'14
-1	0'37
0	~~1~~ ; 4
1	3
2	0
3	-5
4	-12 ; ~~1~~
5	2
6	~~3~~ ; 4
7	3
8	2
9	1
10	0
11	1

$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ -x^2+4 & si\ 0 \le x \le 4 \\ x-3 & si\ 4 < x < 6 \\ |x-10| & si\ x \ge 6 \end{cases}$



Observando el dibujo para calcular límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \boxed{0}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{\text{No tiene}}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \boxed{\text{No tiene}}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -12 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1 \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \boxed{4}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

3) a) $\lim\limits_{x\to 1} (5x^3+3x^2-3) = 5\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 3 = 5+3-3 = \boxed{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^3-3} = \frac{0+1}{0^3-3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (x^3+5)^{(x^3+5)} = (0+5)^{(0+5)} = \boxed{5^5}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x^2-10}\right) = \sqrt{1-10} = \sqrt{-9} = \boxed{\text{No existe}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt[3]{x^2-9}\right) = \sqrt[3]{1^2-9} = \sqrt[3]{-8} = \boxed{-2}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} (-2x^3+3) = -2\cdot\infty^3+3 = \boxed{-\infty}$

g) $\lim_{x\to-\infty} 2^{(-x+5)} = 2^{-(-\infty)+5} = 2^{\infty} = \boxed{\infty}$ h) $\lim_{x\to1^-} \frac{2x}{x} = \frac{2\cdot1}{1} = \boxed{2}$

4 a) $\lim_{x\to5}\frac{3}{(x-5)^2} = \frac{3}{0}$ Ind. $\to$ $\lim_{x\to5^-}\frac{3}{(5^--5)^2} = \frac{3}{(0^-)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to5^+}\frac{3}{(5^+-5)^2} = \frac{3}{(0^+)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$ $\Bigg\}$ $\lim_{x\to5} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) $\lim_{x\to4}\frac{4}{(x-4)^3} = \frac{4}{0}$ Ind $\to$ $\lim_{x\to4^-} f(x) = \frac{4}{(0^-)^3} = -\infty$

$\lim_{x\to4^+} f(x) = \frac{4}{(0^+)^3} = +\infty$ $\Bigg\}$ $\boxed{\text{No tiene}}$

c) $\lim_{x\to-3}\frac{4x^2+5}{x^3+8x^2+x-42} = \frac{4\cdot(-3)^2+5}{(-3)^3+8\cdot(-3)^2+(-3)-42} = \frac{41}{-27+72-3-42} = \frac{41}{0}$

	1	8	1	-42
-3		-3	-15	42
	1	5	-14	0

$\lim_{x\to-3^-}\frac{4x^2+5}{(x+3)(x^2+5x-14)} = \frac{41}{0^-\cdot(9-15-14)} = \frac{41}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{41}{0^+\cdot(-20)} = \frac{41}{0^-} = -\infty$ $\boxed{\text{No tiene}}$

5 a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x+5}{-x^2+3} = \frac{\infty^3}{-\infty^2} = \frac{\infty}{-\infty}$ Ind $\to$ $\frac{\text{GRADO 3}}{\text{GRADO 2}} = \boxed{-\infty}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x^4-2x}{9x^4+5x^3-2} = \frac{-7(-\infty)^4}{9(-\infty)^4} = \frac{-\infty}{\infty}$ Ind

$\frac{\text{Grado 4}}{\text{Grado 4}} = \boxed{\frac{-7}{9}}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4x^2-7x}} = \frac{-2(-\infty)}{\sqrt{4\infty^2}} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind $\to$ $\frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 2/2}}$ $\to$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-2}{\sqrt{4}} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^4-2} = \frac{2(-\infty)}{(-\infty)^4} = \frac{-\infty}{\infty}$ Ind ; $\frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 4}}$ $\to$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$

e) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-12x+32}{x^2+x-20} = \frac{16-48+32}{16+4-20} = \frac{0}{0}$ Ind ; $\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-8)}{\cancel{(x-4)}(x+5)} = \frac{4-8}{4+5} = \boxed{-\frac{4}{9}}$

	1	-12	32
4		4	-32
	1	-8	0

	1	1	-20
4		4	20
	1	5	0

d) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-10x-8} = \frac{(-1)^2-2\cdot(-1)-3}{(-1)^3-(-1)^2-10\cdot(-1)-8} = \frac{1+2-3}{-1-1+10-8} = \frac{0}{0}$ Ind

	1	-2	-3
-1		-1	3
	1	-3	0

	1	-1	-10	-8
-1		-1	2	8
	1	-2	-8	0

$\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x^2-2x-8)} = \frac{-1-3}{(-1)^2-2\cdot(-1)-8} = \frac{-4}{1+2-8}$

$= \frac{-4}{-5} = \boxed{\frac{4}{5}}$

g) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{0}{0}$ Ind , $\lim_{x\to5}\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{(x-5)}} = 5+5 = \boxed{10}$

h) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-x^2-16x+16} = \frac{4^2-16}{4^3-4^2-16\cdot4+16} = \frac{0}{64-16-64+16} = \frac{0}{0}$

	1	-1	-16	16
4		4	12	-16
	1	3	-4	0

$\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x+4)}(x-4)}{\cancel{(x+4)}(x^2+3x-4)} = \frac{4-4}{4^2+4\cdot3-4} = \frac{0}{24} = \boxed{0}$

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x+7}+1} = \frac{+\infty}{\sqrt{\infty+7}+1} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind. $\frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 1/2}}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5-2}}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$; $\frac{\text{GRADO } 5/3}{\text{GRADO } 2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$

K) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-7}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-7}} = \frac{\infty+\infty}{\infty-\infty} =$

$K \to \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x-7}+\sqrt{x-7})(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-7})}{(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-7})(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-7})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x-7}\cdot\sqrt{x+7}+2(x-7)}{(x+7)-(x-7)} = \lim \frac{2\sqrt{x-7}\sqrt{x+7}+2x-7}{14} =$

$= \frac{\infty}{14} = \boxed{+\infty}$

l) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2-3x} - \frac{x^2+7}{x-2}\right) = \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty}$; Operamos $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3-1)(x-2)-(x^2-3x)(x^2+7)}{(x^2-3x)(x-2)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^4}-2x^3-x+2-(\cancel{x^4}+7x^2-3x^3-21x)}{x^3-2x^2-3x^2+6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+20x+7x^2+2}{x^3-5x^2+6x} = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{\text{GRADO 3}}{\text{GRADO 3}} \to \frac{1}{1} = \boxed{1}$

m) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}) = \infty - \infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3-(x+3)}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}} = \frac{-6}{\infty} = \boxed{0}$

n) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x+1} - \frac{x^2}{x+6}\right) = \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty}$; $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4(x+6)-x^2(x+1)}{(x+1)(x+6)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+6x^4-x^3-x^2}{x^2+6x+x+6} = \frac{\infty}{\infty} =$

$= \frac{\text{GRADO 5}}{\text{GRADO 2}} = \boxed{+\infty}$

ñ) $\lim_{x\to0} \left(3x \cdot \frac{5x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{3\cdot0\cdot5\cdot0}{\sqrt{0}}$; $\lim_{x\to0} \frac{15x^2}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to0} \frac{15x^{\cancel{2}}\cdot\sqrt{x}}{\cancel{x}}$; $\lim_{x\to0} 15x\sqrt{x} = 15\cdot0\sqrt{0} = \boxed{0}$

6 a) $f(x) = \frac{x^2-3}{(x+5)(x-1)} = \frac{x^2-3}{x^2+4x-5}$; AV $\left\{ (x+5)(x-1)=0 \right.$ $\to x=-5$; $(-5)^2-3 \neq 0$
$\to x=1$; $1^2-3 \neq 0$

$\boxed{\text{AV } x=-5,\ x=1}$

A.H $\left\{ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \right.$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\to \boxed{\text{A.H ; } y=1}$

b) $f(x) = \frac{x^3-2}{(x-4)(x+1)}$; $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-3x-4}$ $\left\{ \text{A V} \to (x-4)(x+1)=0 \right.$ $\to x=4$; $4^3-2 \neq 0$
$\to x=-1$; $(-1)^3-2 \neq 0$

$\boxed{\text{A.V } x=4,\ x=-1}$

AH $\left\{ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{GRADO 3}}{\text{GRADO 2}} \right.$;

$x^3 - 2 \quad | \ x^2-3x-4$
$-x^3+3x^2+4x-2 \quad x+3$
$-3x^2+9x+12$
$13x+10$

; $\boxed{y = x+3} \to$ A.O

c) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-6x+5}$ $\left\{ \text{A.V } x^2-6x+5=0 \right.$; $x = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \frac{6\pm4}{2} \to 5,\ 1$; $2\cdot5^2-1 \neq 0$; $2\cdot1^2-1 \neq 0$ $\to \boxed{\text{A.V } x=5,\ x=1}$

A.H $\left\{ \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{GRADO 2}}{\text{GRADO 2}} \right.$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2 \to \boxed{\text{A.H } y=2}$

d) $f(x) = \frac{3x}{x^2-x-12}$ $\left\{ \text{A.V} \right.$; $x^2-x-12=0$; $x = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1\pm7}{2} \to 4,\ -3$; $\boxed{\text{AV } x=4,\ x=-3}$ $\to 3\cdot4 \neq 0$; $\to 3\cdot(-3) \neq 0$

AH ; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$; $\frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 2}}$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \to \boxed{\text{A.H } y=0}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{9-x^2}$

AV: $9-x^2=0$, $x^2=9$, $x=\pm 3$; $3^3+2\cdot 3^2\neq 0$; $(-3)^3+2\cdot(-3)^2\neq 0$; $\boxed{A.V \quad x=3 \quad x=-3}$

$A.H \to \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{\text{GRADO } 3}{\text{GRADO } 2} \Rightarrow$ No tiene

$A.O \to \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{\text{GRADO } 3}{\text{GRADO } 2} \Rightarrow$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 & -x^2+9 \\ \hline
-x^3 \quad\quad + 9x & -x-1 \\
\quad x^2+9x & \\
\quad -x^2 \quad\quad +9 & \\
\quad\quad 9x+9 &
\end{array}
$$

$\boxed{A.O \quad y=-x-1}$

d) $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x^2-6x+9}$

$A.V \to x^2-6x+9=0$; $\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$; $-3^2+3\cdot 3+2\neq 0$; $\boxed{A.V \quad x=3}$

$A.H \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \to \frac{\text{GRADO } 2}{\text{GRADO } 2}$; $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$; $\boxed{A.H \quad y=-1}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

$AV \to x-1=0 \to x=1 \to 1^2+1-2=0 \to$ Sale $\frac{0}{0}$ $\to$ No es A.V. Es una indeterminación que no da lugar a una asíntota vertical, sino a una discontinuidad evitable.

A.H → No tiene

$A.O \to$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+x-2 & x-1 \\ \hline
-x^2+x & x+2 \\
\quad 2x-2 & \\
\quad -2x+2 & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\boxed{y=x+2 \quad A.O}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{3x^2-24x+45}$

$A.V \to 3x^2-24x+45=0 \to x^2-8x+15=0$; $x=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}$ → 5, 3

$x=5 \to 5^2+4\cdot 5-21\neq 0$

$x=3 \to 3^2+4\cdot 3-21=0 \to 0/0$ NO A.V

$\boxed{A.V \quad x=5}$

$A.H \to \frac{\infty}{\infty} \to \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y=1/3}$

7) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0<x\leq 3 \\ x-5 & \text{si } 3<x \end{cases}$

$f(0)=0^2+1=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2+1=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a\cdot 0+b=b$

deben ser iguales $\Rightarrow \boxed{b=1}$

$f(3)=3a+b=3a+1$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3a+b=3a+1$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3-5=-2$

deben ser iguales ; $3a+1=-2$; $\boxed{a=-1}$