MATEMATICAS FINANCIERAS

(A) PROGRESIONES ARITMETICAS (P.A)

$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3, \dots, a_n$ $\quad \boxed{d = a_n - a_{n-1}}$ $\quad \boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ → Término general de P.A

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$ → Suma de los n primeros términos. de P.A

PROGRESIONES GEOMETRICAS (P.G)

$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2 \xrightarrow{\cdot r} a_3, \dots, a_n$ $\quad \boxed{r = \frac{a_{n-1}}{a_n}}$ $\quad \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$ → Término general

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}}$$ → Suma de los n primeros términos de P.G ⇒ Si $-1 < r < 1$ → $r^n \simeq 0$ → $\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-r}}$ → Suma n términos donde $-1<r<1$ de una P.G

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_r)^n}}$$ → Producto de los n primeros términos de P.G

(B) PORCENTAJES

Aumento de C en un % → $C + C\frac{x}{100} = \boxed{C\left(1 + \frac{x}{100}\right)}$. Disminución de C en un % → $\boxed{C\left(1 - \frac{x}{100}\right)}$

Porcentajes encadenados ⇒ se múltiplican los porcentajes.

(C) INTERESES

Interés Simple: $C_f = C_i + I$ $\quad \boxed{I = \frac{C_i \cdot r \cdot t}{100}}$ $\quad$ ¡OJO! $\boxed{\frac{r}{100} = i}$ $\quad \boxed{C_f = C_i(1 + i\,t)}$ → Capital final en interés simple

Interés Compuesto: $\boxed{C_f = C_i(1+i)^t}$ → Capital final en I. compuesto para t = años

$$\boxed{C_f = C_i\left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t\cdot K}}$$ → K = nº de veces que se divide el año

→ C_f para t distinto del año.

(D) ANUALIDADES

Anualidades de Capitalización

$$\boxed{C_f = \frac{a\left[(1+i)^{t+1} - (1+i)\right]}{i}}$$

→ a = anualidad de capitalización

t = años

⟺ también se puede usar

$$\boxed{C_f = \frac{a(1+i)\left[(1+i)^t - 1\right]}{i}}$$

t = años

$$\boxed{C_f = \frac{a(1+i/K)\left[(1+i/K)^{t\cdot K} - 1\right]}{i/K}}$$

→ Para t distinto del año

$$\boxed{t = \frac{\log\left(\frac{i \cdot C_f}{a(1+i)} + 1\right)}{\log(1+i)}}$$

Anualidades de Amortización → $\boxed{a = \frac{C \cdot i \cdot (1+i)^t}{\left[(1+i)^t - 1\right]}}$ C = Prestamo que se hace; a = anualidad de amortización

TABLA DE AMORTIZACIÓN

Nº cuotas	Capital pendiente antes de la cuota	interés capital pendiente	Cuota Anual	Capital Amortizado	Capital pendiente después de la cuota
			a	a − i	capital pendiente − capital Amortizado

(E) TASA ANUAL EQUIVALENTE (TAE)

$$\boxed{TAE = \left[\left(1 + \frac{i}{K}\right)^K - 1\right]\cdot 100}$$

i = interés anual

K = nº de veces que se divide el año.

(F) NÚMEROS INDICE

$$\boxed{NI_{t_1}^{t_0} = \frac{X_{t_1}}{X_{t_0}} \cdot 100}$$ → Sirve para que el valor de referencia valga 100

(G) INDICE PRECIOS CONSUMO (IPC)

$$\boxed{IPC = \frac{P_1^{t_1} \cdot q_1^{t_1} + P_2^{t_1} \cdot q_2^{t_1} + \dots + P_n^{t_1} \cdot q_n^{t_1}}{P_1^{t_0} \cdot q_1^{t_0} + P_2^{t_0} q_2^{t_0} + \dots + P_n^{t_0} q_n^{t_0}}}$$

(H) INDICE DE DESARROLLO HUMANO

$$\boxed{IDH = \frac{L + E + R}{3}}$$

L = Esperanza de vida al nacer o longevidad

E = Nivel de estudios académicos

R = Renta per cápita.

→ Son números comprendidos entre 0 y 1. Cuánto más cercano es a 1, mayor es el desarrollo en ese aspecto.

ANUALIDADES
→ CAPITALIZACIÓN
→ AMORTIZACIÓN

1.- ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN

Las operaciones de capitalización son operaciones financieras en las que se entrega cierto capital cada periodo de tiempo de forma que al finalizar la operación, se consigue un capital final igual a la suma de las cantidades entregadas más los intereses producidos por estas cantidades.
Cuando la cantidad es anual y siempre la misma se llama ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN (a)
Ejemplos de capitalizaciones de este tipo: Planes de pensiones, cuenta ahorro vivienda.
El Cf que se consigue imponiendo una anualidad de a euros, durante t años a un rédito r de interés compuesto es:

$$\boxed{Cf = \frac{a\left[(1+r)^{t+1} - (1+r)\right]}{r}} \iff \boxed{Cf = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^{t} - 1\right]}{r}}$$

→ Si el periodo no es anual

$$Cf = \frac{a(1+r/k)\left[(1+r/k)^{tk} - 1\right]}{r/k}$$

Dem

Anualidad (€)	Años que produce	Capital
1ª anualidad: a	t	$a(1+r)^t$
2ª anualidad: a	$t-1$	$a(1+r)^{t-1}$
⋮	⋮	⋮
última anualidad: a	1	$a(1+r)$

Como $S_n = \frac{a_n(r^n-1)}{r-1}$ y en este problema:

$a_n = a(1+r)$; $S_n = \frac{a(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}{1+r-1}$
$r = (1+r)$

$$S_n = \frac{a\left[(1+r)^{n+1} - (1+r)\right]}{r}$$

(Sustituimos n por t)

Ejemplo:
Un trabajador comienza un plan de pensiones a los 40 años, con cuotas anuales de 1000 € a un 10 % de interés compuesto anual. ¿Qué capital tendrá al cumplir 65 años?

Sol: $a = 1000$ € $\quad t = 25$ años
$r = \frac{10}{100} = 0'1$

$$Cf = \frac{1000\cdot(1+0'1)\left[(1+0'1)^{25} - 1\right]}{0'1} = \boxed{108.181'77\text{ €}}$$

2.- ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN. TABLA DE AMORTIZACIÓN

Un problema relativamente frecuente es tener que pedir dinero prestado para hacer frente a unos gastos.
Cuando se pide dinero a una entidad financiera para comprar una casa, el crédito se llama hipotecario. Si es para otro tipo de gastos, se llama personal. Al pago de estas deudas se le llama amortizar la deuda o el préstamo.
Si el dinero que devolvemos (amortización) es en varios años, y es una cantidad fija anual, la llamaremos ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN.
Hemos de entender que al final debemos devolver no solamente el capital prestado, sino además, los intereses que genera la deuda.

Si llamamos C al préstamo, para calcular la anualidad de amortización (a), recurrimos a la siguiente expresión:

$$\boxed{a = \frac{C \cdot r\,(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}-1}}$$

→ Si el periodo no es anual:

$$a = \frac{c \cdot r/k\,(1+r/k)^{t \cdot k}}{(1+r/k)^{t \cdot k}-1}$$

Dem

Anualidad (€)	Años que produce	Capital + Intereses
1ª anualidad: a	$t-1$	$a(1+r)^{t-1}$
2ª anualidad: a	$t-2$	$a(1+r)^{t-2}$
⋮		
penúltima: a	1	$a(1+r)$
última: a		a

→ La suma de todas hace de $C_f = C(1+r)^t$

$$\rightarrow S_n = \frac{a\,((1+r)^n-1)}{r} = C(1+r)^t$$

$$\frac{a\left[(1+r)^t-1\right]}{r} = C(1+r)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{C\,r\,(1+r)^t}{\left[(1+r)^t-1\right]}$$

Para ver como va disminuyendo la deuda, se hacen las tablas de amortización:

Nº cuota	Capital pendiente antes de la cuota	Interés capital pendiente	Cuota anual (a)	Capital Amortizado ($a-i$)	Capital pendiente después cuota

Ejemplo: Nos conceden 15000 € a un interés del 5% anual a devolver en 3 cuotas iguales en 3 años. Completar tabla amortización.

$$a = \frac{C \cdot r\,(1+r)^t}{(1+r)^t-1} = \frac{15000 \cdot 0'05\,(1+0'05)^3}{(1+0'05)^3-1} = 5508'13 \text{ (Redondeado)}$$

Nº cuota	Capital pendiente antes cuota	i (interés capital pendiente)	(a) Cuota anual	Capital amortizado $a-i$	Deuda pendiente = Capital pendiente − Amortizado
1ª	15000	15000 · 0'05 = 750	5508'13	5508'13 − 750 = 4758'13	15000 − 4758'13 = 10241'87
2ª	10241'87	10241'87 · 0'05 = 512'09	5508'13	5508'13 − 512'09 = 4996'04	10241'87 − 4996'04 = 5245'83
3ª	5245'83	5245'83 · 0'05 = 262'29	5508'13	5508'13 − 262'29 = = 5245'84	5245'83 − 5245'84 = 0

TAE (Tasa anual equivalente): Tasa de interés que produce el mismo capital si los periodos de capitalización fuesen anuales.

$$\boxed{TAE = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} - 1\right] \cdot 100}$$

Ejercicio: Calcular TAE de una tasa nominal del 6% si los periodos de capitalización son trimestrales

$k = 4$; $TAE = \left[\left(1+\frac{0'06}{4}\right)^{4}-1\right] \cdot 100 = 6'14\%$

Nºs índice: Muchas veces nos perdemos con el sentido de los números y no vemos claramente la relación de unos con otros. Para facilitar esto, hacemos que el valor de referencia valga 100, de tal manera que nos resulte más fácil la comparación.