1.- Monomios

Expresiones algebraicas en donde intervienen números, letras (que representan números) y la operación aritmética multiplicación:

ax^n { a = Coeficiente o parte numérica; x^n = Parte literal; n = grado del monomio ($n \in N$). Si hay mas de una variable, se suman exponentes.

Ej: $2x^4$, $3xy$, $\frac{2x^3}{5}$

2.- Operaciones con Monomios

- SUMA Y RESTA: La suma de monomios semejantes (que tienen la misma parte literal) es otro monomio, cuyo coeficiente es la suma de coeficientes, teniendo el monomio resultante la misma parte literal. Ej: $6xy^2 - 4xy^2 = 2xy^2$

Si los monomios no son semejantes, su suma da lugar a los polinomios: $3x^2 + 4x = 3x^2 + 4x$

- PRODUCTO: El producto de monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal es el producto de las partes literales:
Ej: $6x^3 \cdot 2x = 12x^4$

- DIVISION: El cociente de monomios no siempre es un monomio. Cuando no lo es, al resultado se le llama fracción algebraica
Ej 1: $\frac{6x^3}{2x^2} = 3x$ Ej 2: $\frac{4y}{2x} = \frac{2y}{x}$ (Fracción algebraica)

- POTENCIA: Al ser un producto (considerando el exponente un nº Natural mayor que 1), el resultado es otro monomio, en donde se elevan tanto el coeficiente como la parte literal.
Ej: $(2x^2y^3)^4 = 2^4 \cdot (x^2y^3)^4 = 16x^8y^{12}$

3.- Valor numérico de un monomio

Es el número que resulta de sustituir las variables (letras) por números concretos, una vez efectuadas las operaciones.
Ej: Valor numérico de $3x^2y^3$ si $x=2$, $y=-3$; $3\cdot(2)^2\cdot(-3)^3 = 3\cdot 4\cdot(-27) = \boxed{-324}$

4.- Polinomios

Son el resultado de la suma o resta de monomios. Ej $P(x,y) = 3x^2y + 5xy - 2$

A la hora de trabajar, los más interesantes son los Polinomios con una indeterminada,
Ej: $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 5 \Rightarrow$ Cada monomio se le llama término (4 en este caso).
Se les suele escribir ordenados (de mayor a menor exponente), siendo el grado del polinomio el mayor de los grados de los monomios.
Al término que no lleva parte literal, se le llama término independiente.

5.- Operaciones con monomios

Las mismas que monomios. Veamoslas con ejemplos: Sean $P(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $Q(x) = -3x^2 + 7x - 3$, $R(x) = x + 4$

- Suma: $P(x) + Q(x) = -x^2 + 2x - 2$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \\ + \quad -3x^2 + 7x - 3 \\ \hline -x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

- Resta: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$ (Más cómodo sumar el opuesto) $= 5x^2 - 12x + 4$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \\ + \quad 3x^2 - 7x + 3 \\ \hline 5x^2 - 12x + 4 \end{array}$$

- Producto: $P(x) \cdot R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 19x + 4$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \\ \times \quad x + 4 \\ \hline 8x^2 - 20x + 4 \\ + \quad 2x^3 - 5x^2 + x \quad \\ \hline 2x^3 + 3x^2 - 19x + 4 \end{array}$$

- Potencia: $R(x)^2$

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ \times \quad x + 4 \\ \hline 4x + 16 \\ x^2 + 4x \quad \\ \hline x^2 + 8x + 16 \end{array}$$

Conviene recordar las igualdades notables:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$; $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

- División: La división es idéntica a la división numérica, pero en polinomios no se hace la resta de "cabeza", sino que se indica como suma del opuesto.

Ej: $7 \,|\underline{2}$, resto 1, cociente 3 $\Rightarrow$ En polinomios $+7 \; -6$, divisor 2, cociente 3, resto 1

$Q(x) : R(x) = (-3x^2+7x-3) : (x+4) =$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} -3x^2+7x-3 & x+4 \\ \cline{2-2} +\,3x^2+12x & -3x+19 \\ \hline 19x-3 & \\ +\;-19x-76 & \\ \hline -79 & \end{array}$$

En los casos en los que el divisor es $(x-a)$, podemos utilizar el mét. abreviado de Ruffini:

$Q(x) : R(x) \rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccc} & -3 & 7 & -3 \\ a \rightarrow -4 & & 12 & -76 \\ \hline & -3 & 19 & \boxed{-79} \end{array}$$

$\Rightarrow$ coeficientes (Si falta alguno, ponemos un 0).

Resto

Cociente: $-3x+19$ (Siempre un grado inferior al Dividendo)

Resto: -79.

6.- Valor numérico de un polinomio

Es el número de resulta de sustituir las variables por números, una vez hechas las operaciones.

Ej: $P(x) = 3x^4-2x^3+2x^2-3$. Hallar valor numérico de $P(x)$ si $x=-1$.

$P(-1) = 3\cdot(-1)^4-2\cdot(-1)^3+2(-1)^2-3 = 3\cdot1-2\cdot(-1)+2\cdot1-3 = 3+2+2-3 = \underline{4}$

7.- Teorema del resto y teorema del factor

T.ª Resto: El resto de una división de $P(x)$ por $x-a$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x=a$

$P(x) \,|\underline{x-a}$, resto R, cociente $C(x)$

$P(x) = C(x)\cdot(x-a)+R \xrightarrow{\text{si } x=a} P(a) = C(a)\cdot(\cancel{a-a})+R \Rightarrow \boxed{P(a)=R}$

NOTA: Sirve para calcular valores numéricos utilizando Ruffini.

T.ª Factor: Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ (indica por tanto $R=0$) si el valor numérico de dicho polinomio para $x=a$ es 0.

8.- Descomposición factorial de un polinomio

Raíz de un polinomio: Todo número a que hace que el valor numérico de $P(x)$ para $x=a$ sea 0.

En la práctica, y según el Teorema del resto, calcularemos las raíces enteras por la regla de Ruffini. Para ello, probaremos entre los nºs divisores del término independiente (si lo hay).

El nº máximo de raíces reales coincide con el grado del polinomio.

Descomposición de un polinomio en factores

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, \dots a_0$ son números.

Si hay n raíces $x_1, x_2, \cdots x_n$, la descomposición factorial será:

$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

Ej: Hallar raíces y descomponer $P(x) = 3x^3+6x^2-3x-6$ $\Rightarrow$ Posibles raíces: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Probamos

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 6 & -3 & -6 \\ 1 & & 3 & 9 & 6 \\ \hline & 3 & 9 & 6 & \boxed{0} \\ -1 & & -3 & -6 & \\ \hline & 3 & 6 & \boxed{0} & \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Raíces $\Rightarrow$ $x=1$, $x=-1$, $x=-2$

Factorización $\Rightarrow$ $P(x) = 3(x-1)(x+1)(x+2)$

9.- Fracciones algebraicas

: Son el cociente de 2 polinomios, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$.

Al igual que fracciones, podemos operar $(+,-,\times,:)$, simplificar, etc. con las mismas ideas que las numéricas, pensando en que los factores son expresiones algebraicas.

POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Indica que expresiones son polinomios y cuál es su grado: a) $\frac{1}{5}x^3 - x + 1$ b) $(x-1)(x+1)$
c) $\frac{x^2+1}{2}$ d) $\sqrt{x+2}$ e) $x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x}$

2.- Opera: a) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) + (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) =$ b) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) - (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) =$
c) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot 2x^2 =$ d) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - x + 3) =$ e) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2) =$

3.- Divide: a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 + x + 1) =$ b) $(3x^4 - 2x^2 - 5x + 3) : (x - 2) =$

4.- Descompón en factores: a) $x^2 - y^2$ b) $a^2 - 9b^2$ c) $x^2 + 4xy + 4y^2$ d) $x^2 - y^4$
e) $x^2 + 12x + 36$ f) $x^2 - 8x + 16$

5.- Aplica la relación $D = dc + r$ para encontrar un polinomio que dividido entre $x^2 - 1$ dé cociente $x + 3$ y resto $x - 2$

6.- Divide por Ruffini: a) $(x^3 - x^2 + 11x - 10) : (x - 2) =$ b) $(6x^3 - 2x + x^4 + 15 - 6x^2) : (x + 3) =$
c) $\left(\frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x\right) : (x - 1) =$ d) $(x^6 - x^4) : (x + 1) =$

7.- Se sabe que al dividir $x^3 - x^2 + ax - 10$ entre $x - 2$ la división es exacta. ¿Cuánto vale a?

8.- Halla raíces y factoriza: a) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ b) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = Q(x)$
c) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = R(x)$ d) $S(x) = 5x^3 - 20x^2 - 20x + 80$ e) $T(x) = 3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$
f) $U(x) = x^6 - x^4$

9.- Simplifica las siguientes fracciones: a) $\frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x}$ b) $\frac{x(x-y)}{y(y-x)}$ c) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$
d) $\frac{3a - 3b}{2b^2 - 2a^2}$ e) $\frac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$ f) $\frac{b + b^2}{a + ab}$

10.- Comprueba la equivalencia de $\frac{x-2}{x^2 + x - 6}$ y $\frac{x}{x^2 + 3x}$

11.- Opera: a) $\frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x+1} =$ b) $\frac{2x-3}{x-1} + \frac{3x+2}{x-1} - \frac{5x-4}{x-1} =$
c) $1 + \frac{x-y}{x+y}$ d) $\frac{2}{3y} \cdot \frac{5}{y} =$ e) $\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ac} \cdot \frac{c^2}{ab} =$ f) $\frac{x}{3} : \frac{2x}{5} =$
g) $\frac{1}{x+1} : \frac{1}{x-1} =$ h) $\frac{5 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} =$

12.- Halla a para que el resto de la división $3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + a$ entre $x + 2$ sea 8.

SOLUCIÓN HOJA POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- a) $\boxed{\text{Sí. Grado } 3}$ b) $\boxed{\text{Sí. } x^2-1. \text{ Grado } 2}$ c) $\boxed{\text{Sí. Grado } 2}$ d) $\boxed{\text{No}}$ e) $\boxed{\text{No}}$

2.- a)
$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-2x+3 \\ +\quad 2x^3-6x^2+5x-3 \\ \hline \boxed{3x^4+7x^3-6x^2+3x} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-2x+3 \\ +\quad -2x^3+6x^2-5x+3 \\ \hline \boxed{3x^4+3x^3+6x^2-7x+6} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-2x+3 \\ \times \qquad 2x^2 \\ \hline \boxed{6x^6+10x^5-4x^3+6x^2} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rl} 3x^4+5x^3-2x+3 & \lfloor\, x^2-3x+2 \\ +\ -\cancel{3x^4}+9x^3-6x^2 & \boxed{3x^2+14x+36} \\ \hline +\ \cancel{14x^3}-6x^2-2x+3 & \\ -\cancel{14x^3}+42x^2-28x & \\ \hline \cancel{36x^2}-30x+3 & \\ -\cancel{36x^2}+108x-72 & \\ \hline 78x-69 & \end{array}$$

3) a)
$$\begin{array}{rl} 3x^3-2x^2+x-1 & \lfloor\, x^2+x+1 \\ +\ -\cancel{3x^3}-3x^2-3x & \boxed{3x-5} \\ \hline -5x^2-2x-1 & \\ +\ \cancel{5x^2}+5x+5 & \\ \hline 3x+4 & \end{array}$$

b) Más rápido por Ruffini.
$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & & 6 & 12 & 20 & 30 \\ \hline & 3 & 6 & 10 & 15 & \boxed{33} \end{array}$$

$\boxed{C(x)=3x^3+6x^2+10x+15 \quad R=33}$

4) a) $x^2-y^2=\boxed{(x-y)(x+y)}$ b) $a^2-9b^2=\boxed{(a-3b)(a+3b)}$ c) $x^2+4xy+4y^2=\boxed{(x+2y)^2}$
d) $x^2-y^4=\boxed{(x+y^2)(x-y^2)}$ e) $x^2+12x+36=\boxed{(x+6)^2}$ f) $x^2-8x+16=\boxed{(x-4)^2}$

5) $P(x)=(x^2-1)(x+3)+(x-2)=x^3+3x^2-\cancel{x}-3+\cancel{x}-2=\boxed{x^3+3x^2-5}$

6) a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 11 & -10 \\ 2 & & 2 & 2 & 26 \\ \hline & 1 & 1 & 13 & \boxed{16} \end{array}$$

$\boxed{C(x)=x^2+x+13 \quad R=16}$

b) Se ordena $\Rightarrow (x^4+6x^3-6x^2-2x+15):(x+3)$
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & -6 & -2 & 15 \\ -3 & & -3 & -9 & 45 & -129 \\ \hline & 1 & 3 & -15 & 43 & \boxed{-114} \end{array}$$

$\boxed{C(x)=x^3+3x^2-15x+43 \quad R=-114}$

c)
$$\begin{array}{c|cccccc} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} & \frac{15}{6} & \frac{14}{6} & \frac{12}{6} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} & \frac{15}{6} & \frac{14}{6} & \frac{12}{6} & \boxed{12/6} \end{array}$$

$\boxed{C(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{13}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{3}x+2 \quad R=2}$

d)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 & \boxed{2} \end{array}$$

$\boxed{C(x)=x^5-x^4+2x^3-2x^2+2x-2 \quad R=2}$

7) $P(2)=0 \Rightarrow 2^3-2^2+2a-10=0$; $8-4+2a-10=0$; $2a=6$; $\boxed{a=3}$

8.- a)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -13 & 1 & 12 \\
1 & & 1 & 0 & -13 & -12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -13 & -12 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 1 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 12 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\
4 & & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

Raíces: $x=1$, $x=-1$, $x=-3$, $x=4$ Fact. $(x-1)(x+1)(x+3)(x-4)$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\
-1 & & -1 & -2 & 9 & 18 \\
\hline
 & 1 & 2 & -9 & -18 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 0 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & 9 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\
-3 & & -3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

raíces $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, $x=3$

Factorización $(x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -12 & 41 & -30 \\
5 & & 5 & -35 & 30 \\
\hline
 & 1 & -7 & 6 & \boxed{0} \\
6 & & 6 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{0} & \\
1 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

raíces → $x=5$, $x=6$, $x=1$

Fact $(x-5)(x-6)(x-1)$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -20 & -20 & 80 \\
-2 & & -10 & 60 & -80 \\
\hline
 & 5 & -30 & 40 & \boxed{0} \\
2 & & 10 & -40 & \\
\hline
 & 5 & -20 & \boxed{0} & \\
4 & & 20 & & \\
\hline
 & 5 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

raíces → $-2, 2, 4$

$(x+2)(x-2)(x-4)$

e)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -6 & -3/4 & 3/2 \\
2 & & 6 & 0 & -3/2 \\
\hline
 & 3 & 0 & -3/4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$3x^2 - \frac{3}{4} = 0$

$3x^2 = \frac{3}{4}$; $x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$

Raíces: $2, 1/2, -1/2$ Factorización : $3(x+1/2)(x-1/2)(x-2)$

f) $x^6 - x^4 = x^4(x^2-1) = x^4(x+1)(x-1)$ Raíces: 0 (cuatro), -1, 1

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -1 & -2 \\
2 & & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 4 & 3 \\
-1 & & -1 & -3 \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

9.- a) $\frac{\cancel{x}(3x^2-2x+1)}{\cancel{x}(x-3)} = \boxed{\frac{3x^2-2x+1}{x-3}}$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & -2 & 1 \\
3 & & 9 & 21 \\
\hline
 & 3 & 7 & \boxed{22}
\end{array}$$

b) $\frac{x(x-y)}{y(y-x)} = \frac{-x\cancel{(y-x)}}{y\cancel{(y-x)}} = \boxed{\frac{-x}{y}}$

c) $\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+3)} = \boxed{\frac{x-2}{x+3}}$

d) $\frac{3a-3b}{2b^2-2a^2} = \frac{3(a-b)}{2(b^2-a^2)} = \frac{3(a-b)}{2(b-a)(b+a)} = \frac{-3\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}(b+a)} = \boxed{\frac{-3}{2(b+a)}}$

e) $\frac{x^2-x}{x^3-2x^2+x} = \frac{x(x-1)}{x(x^2-2x+1)} = \frac{\cancel{x(x-1)}}{\cancel{x}(x-1)^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{1}{x-1}}$

f) $\frac{b+b^2}{a+ab} = \frac{b\cancel{(1+b)}}{a\cancel{(1+b)}} = \boxed{\frac{b}{a}}$

10.- $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \boxed{\frac{1}{x+3}}$; $\frac{x}{x^2+3x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+3)} = \boxed{\frac{1}{x+3}}$ SI

11.- x, $x(x+1)$, $(x+1)$ → mcm $= x\cdot(x+1)$

a) $\frac{(x+1)(x+1)+(x-2)-(2x-1)x}{x\cdot(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+x-2-2x^2+x}{x^2+x} = \boxed{\frac{-x^2+4x-1}{x^2+x}}$

b) $\frac{2x-3+3x+2-5x+4}{x-1} = \boxed{\frac{3}{x-1}}$ c) $\frac{x+y+x-y}{x+y} = \boxed{\frac{2x}{x+y}}$ d) $\boxed{\frac{10}{3y^2}}$ e) $\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} = \boxed{1}$

f) $\frac{5x}{6x} = \boxed{\frac{5}{6}}$ g) $\boxed{\frac{x-1}{x+1}}$ h) $\frac{5x+1}{x} : \frac{2x-1}{x} = \frac{(5x+1)\cdot\cancel{x}}{(2x-1)\cdot\cancel{x}} = \boxed{\frac{5x+1}{2x-1}}$

12)

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & a \\
-2 & & -6 & 20 & & & \\
\hline
 & 3 & -10 & 22 & & &
\end{array}$$

→ Rollo → Mejor sustituir → $\boxed{\text{SOL: } 184}$