UNIDAD 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- Ecuación lineal

Es toda expresión algebraica del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$, donde $a_1, \ldots a_n, b$ son nºs conocidos mientras que $x_1, \ldots x_n$ son números desconocidos (incógnitas). A los valores que les acompaña la x, se llaman coeficientes, mientras b, es el término independiente.

Llamamos SOLUCIÓN de una ec., al conjunto de nºs reales que al sustituirlos por las incógnitas convierten la igualdad en una identidad, es decir, hacen que la igualdad sea verdadera.

Una ec. lineal puede tener: a) Una única solución b) Infinitas soluciones c) No tener solución.

2.- Sistemas 2x2

Sistemas de 2 ecs. con 2 incógnitas: $\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2 \end{cases}$

Según el nº de soluciones, un sistema puede ser:
- COMPATIBLE: CON SOLUCIÓN
  - DETERMINADO (UNA ÚNICA SOLUCIÓN)
  - INDETERMINADO (Infinitas SOLUCIONES)
- INCOMPATIBLE: SIN SOLUCIÓN

Los métodos para resolver sistemas:
- SUSTITUCIÓN → Se despeja una variable y se sustituye en la otra ec.
- IGUALACIÓN → Se despejan la misma variable y se igualan ecs.
- REDUCCIÓN → Pasamos mediante productos y sumas de un sistema 2x2 a una ecuación 1x1.

3.- Sistemas de ecs. lineales con coeficientes reales

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Si $b_1, b_2, \ldots b_m = 0$, se llama Sist. Homogéneo. Siempre tiene solución (Aunque sea la trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Se pueden expresar los sistemas de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ MATRIZ COEFICIENTES (A)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ MATRIZ AMPLIADA (A^*)

De tal manera que se puede escribir:

$$(A) \cdot (X) = (B) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

4.- Sistemas Equivalentes

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

5.- Resolución de sistemas. Métodos de resolución

Resolver un sistema es hallar sus soluciones. Hay distintas formas de resolver un sistema:

A) Método de la matriz inversa: Puesto que los sistemas se pueden expresar matricialmente, $A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Ej $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-3) = 5$

$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 + 3/5 \\ 7/5 - 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}}$$

B) Método de Gauss

Se suele emplear cuando el nº de ecuaciones es igual al nº de incógnitas, aunque es válido para cualquier sistema.
Se basa en el método de reducción y consiste en transformar la matriz ampliada en una matriz triangular.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots \\ \qquad\qquad c_{mn}x_n = d_n \end{cases}$$

Ej

$$\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ x-y+z=2 \\ -x+2y+3z=4 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 11 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

MEJOR COMO PIVOTE

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \end{array}\right) \text{ (4)} \xrightarrow{-5F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right)$$

→ Resolvemos de abajo a arriba por sustitución

$-23z = -23 \to z = 1$

$y + 4\cdot 1 = 6 \to y = 2$

$x - 2 + 1 = 2 \to x = 3$

Sol: $(3, 2, 1)$ ← x, y, z

C) Método de Gauss-Jordan

Es una mejora del método anterior. Se trata de llegar a una matriz en que la diagonal principal sean todos 1, y los demás elementos, 0.

Ej: En el caso del ejercicio anterior y empezando por (4):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_2+F_3]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3/-23} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_3+F_2]{-5F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Si al resolver por Gauss o Gauss-Jordan, alguna fila tiene todos los elementos 0 menos el término independiente, decimos que el sistema no tiene solución.

D) Método de Cramer

Un sistema de ecuaciones se dice que es de Cramer si el nº de ecuaciones es igual al nº de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0.

Para resolver un sistema de Cramer, por ejemplo en un sist. 3x3

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ej: En el ejercicio anterior ⇒

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{-23} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-23} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-23}{-23} = 1$$

6. Teorema de Rouché

La condición necesaria y suficiente para que un sistema S de m ecuaciones con n incógnitas sea compatible (Tenga solución), es que rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. ⇒ S es compatible si Rango A = Rango A*

Entonces
- Rango A = Rango A* ⇒ S es Compatible →
  - Rango A = Rango A* = n → Determinado
  - Rango A = Rango A* = r < n → Indeterminado.
- Rango A ≠ Rango A* ⇒ S es Incompatible

AUTOEVALUACIÓN

1. Se considera el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$. Para $m=0$, el sistema es:

a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Incompatible

2. Para $m=1$, el sistema de la actividad anterior es:

a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Incompatible

3. Para $m=2$, el sistema de la actividad número 1 es:

a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Incompatible

4. Las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -8x+12y=21 \end{cases}$ son:

a) Coincidentes b) Secantes c) Paralelas

5. Los planos cuyas ecuaciones forman el sistema $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x+y-2z=-5 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases}$ son:

a) Coincidentes b) Secantes en un punto c) Paralelos

6. Sea el sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=8 \\ y+z=1 \end{cases}$. Si lo resolvemos por Cramer o por Gauss, obtenemos:

a) $x=4; y=-5; z=6$ b) $x=3; y=-4; z=5$ c) $x=5; y=-6; z=8$

5. La solución para la cual $z=38$ en el sistema $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+8y-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$ es:

a) $x=2; y=14; z=38$ b) $x=14; y=2; z=38$ c) $x=-2; y=2; z=38$

8. La suma de las tres cifras de un determinado número es 13. La cifra de las centenas excede en 4 unidades a la de las decenas. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas, el número aumenta en 495 unidades. El número buscado es:

a) 409 b) 904 c) 625

9. Comprar dos refrescos (r), un bocadillo (b) y dos dulces (d), nos cuesta 14 euros. Si compramos siete refrescos, tres bocadillos y cuatro dulces, el importe es 17 euros. El precio de un bocadillo y de un refresco en función del precio de un dulce es:

a) $r=25-2d; b=6d-64$ b) $r=2d; b=6d$ c) $r=2d-25; b=64-6d$

10. Por cuatro batidos, un helado y dos sándwiches nos cobraron en una cafetería 13 euros. Otro día, por cuatro helados y cuatro sándwiches nos cobraron 20 euros. Un tercer día tuvimos que pagar 9 euros por un sándwich y cuatro batidos. ¿Algún día nos presentaron una factura incorrecta?

a) Sí b) No c) No se puede saber

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

15. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 7x - 8y + 8z = 22 \end{cases}$

16. Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + y = 3 \qquad y - 2x = -6 \qquad 3y - 6x = -3$$

Representa e interpreta gráficamente la situación relativa de las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema.

17. Sea el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro m: $\begin{cases} 3x + (2m + 3)y = 1 \\ -3mx + y = 1 \end{cases}$

a) Exprésalo en forma matricial, siendo los elementos de una de las matrices que intervienen las variables x e y.

b) Discútelo según los valores del parámetro m.

c) Determina su solución para $m = 5$.

18. Dado el sistema: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \end{cases}$

a) Clasifícalo y resuélvelo.

b) Añade una ecuación de modo que el sistema resultante represente las ecuaciones de tres planos que se cortan en una recta.

19. La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre, madre e hijo es 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen el padre, la madre y el hijo en la actualidad?

20. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. Averigua cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

21. Si a un número de dos cifras se le suma 18, se obtiene el número con las cifras intercambiadas. Sabiendo que la suma de las cifras del número es 16, encuentra dicho número.

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve por el método de Gauss:

a) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A \cdot A^t$.

b) El sistema de ecuaciones lineales no homogéneo cuya matriz ampliada es $A^t \cdot A$, siendo la última columna los términos independientes.

23. Un cine proyecta una película sólo tres días: lunes, martes y miércoles. Se sabe que el número de espectadores del martes se incrementó un 12 % respecto al del lunes, el miércoles ese número disminuyó un 12 % respecto al martes y el lunes ese número superó en 36 espectadores el del miércoles. ¿Cuántos espectadores vieron la película cada uno de los días?

24. Discute, según los valores de t y resuelve cuando sea posible, encontrando la solución para la cual $z = 1$, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ tx + 2z = 0 \\ 2x - y + tz = 0 \end{cases}$$

AUTOEVALUACION SISTEMAS ECUACIONES

1) $m=0 \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \\ x+y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

S. Comp. Indet. = b

2) $m=1 \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ y+z = 0 \\ x+y+z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$-z=-1 \Rightarrow z=1$

$y+1=0 \rightarrow y=-1$

$x-1=1 \rightarrow x=2$

S. Comp. Determ. = a

3) $m=2 \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ 2y+z = 0 \\ x+3y+2z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$

$-z=-2 \rightarrow z=2$

$2y+2=0 \rightarrow y=-1$

$x-1=1 \rightarrow x=2$

S. Comp Determ = a

4) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -8x+12y=21 \end{cases} \xrightarrow{(\times 4)} \begin{cases} \cancel{8x}-\cancel{12y}=28 \\ -\cancel{8x}+\cancel{12y}=21 \end{cases} +$

$0 = 49$

→ No tiene solución. No hay puntos en común. Son rectas paralelas = c

5) $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x+y-2z=-5 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3F_2+F_1 \\ -2F_1+3F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 11 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}\right)$

→ $z=4$, $y=2$, $x=1$ → Los 3 se cortan en el punto $(1,2,4)$ → Secantes en un punto = b

6) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=8 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$

$z=5$, $y=-4$, $x=3$ → $(3,-4,5)$ → b

7) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+8y-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2F_1+F_2 \\ -5F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & -38 & 14 & 0 \end{array}\right)$

$-2F_2+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → S. Comp. Indet. $\begin{cases} x+8y-3z=0 \\ -19y+7z=0 \end{cases}$

$z=z$

$y = \frac{-7z}{-19} = \frac{7}{19}z$

$x+8\cdot\left(\frac{7}{19}z\right)-3z=0$, $x=3z-\frac{56}{19}z=\frac{1}{19}z$

$\left(\frac{1}{19}z, \frac{7}{19}z, z\right) \Rightarrow$ Si $z=38 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{38}{19}=2 \\ y=7\cdot\frac{38}{19}=14 \\ z=38 \end{cases} \rightarrow (2,14,38) = a$

8) Nº: $\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}$ $\quad \begin{cases} x+y+z=13 \\ x=y+4 \\ 100z+10y+x-(100x+10y+z)=495 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13 \\ x-y=4 \\ -99x+99z=495 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -99 & 0 & 99 & 495 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_1-F_2 \\ 99F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 99 & 198 & 1782 \end{array}\right) \xrightarrow{-99F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 297 & 2673 \end{array}\right)$

→ $z=\frac{2673}{297}=9$

$2y+9=9 \rightarrow y=0$

$x+0+9=13$; $x=4$

Número es 409 = a

(9) r = precio en € de un refresco
b = " " " " " bocadillo
d = " " " " " dulce

$$\begin{cases} 2r + b + 2d = 14 \\ 7r + 3b + 4d = 17 \end{cases} \xrightarrow{x(-3)} \begin{cases} -6r - \cancel{3b} - 6d = -42 \\ 7r + \cancel{3b} + 4d = 17 \end{cases} +$$

$$r \qquad -2d = -25$$

$$r = -25 + 2d$$

$$b = 14 - 2(2d - 25) - 2d = 14 - 4d + 50 - 2d = 64 - 6d$$

$$\begin{cases} r = 2d - 25 \\ b = 64 - 6d \end{cases} = c$$

(10) b = precio en € de 1 batido
h = " " € " 1 helado
s = " " € " 1 sandwich

$$\begin{cases} 4b + h + 2s = 13 \\ \quad 4h + 4s = 20 \\ 4b \quad + 1s = 9 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \\ 4 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ F_1 - F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ Equivalentes } \quad 1h + 1s = 4$$

No podemos saber si algún día nos presentaron una factura incorrecta, ya que la solución no es única $\Rightarrow$ C

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

(15)
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 7x - 8y + 8z = 22 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & 8 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 7 & -8 & 8 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3F_1+F_2 \\ -7F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & -15 & -6 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ -3F_2+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{S. Comp. Indet.} \quad z = z$$

$$-5y - 2z = 5 \; ; \; y = -\frac{5+2z}{5} \; ; \; x - \frac{5+2z}{5} + 2z = 1 \; ; \; x = \frac{10-8z}{5}$$

$$\boxed{\text{SOL: } \left(\frac{10-8z}{5}, -\frac{5+2z}{5}, z\right)}$$

(16)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \; (a) \\ -2x + y = -6 \; (b) \\ -6x + 3y = -3 \; (c) \end{cases}$$

(a) $y = 3 - 2x$

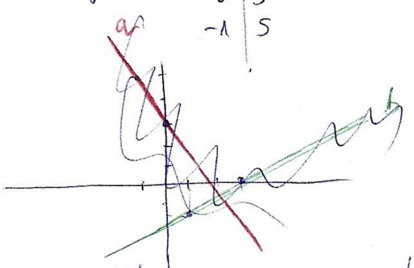
x	y
0	3
-1	5

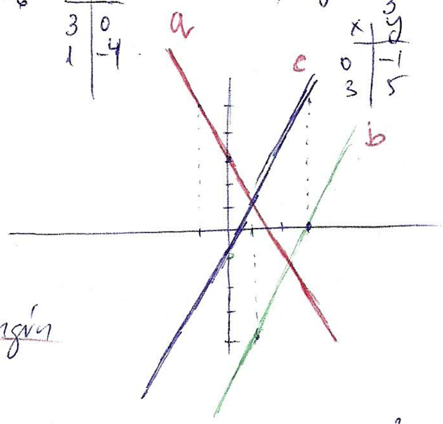
(b) $y = 2x - 6$

x	y
3	0
1	-4

(c) $y = \frac{6x-3}{3} = 2x - 1$

x	y
0	-1
3	5





Es un sistema incompatible, ya que no hay ningún punto en común.

(17)
$$\begin{cases} 3x + (2m+3)y = 1 \\ -3mx + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Estudiamos el rango} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2m+3 \\ -3m & 1 \end{vmatrix} = 3 - (2m+3)(-3m) = 3 + 6m^2 + 9m$$

$\rightarrow$ Dividimos por 3 $\quad 2m^2 + 3m + 1 = 0 \; ; \; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} m = -1 \\ m = -1/2 \end{cases}$

b) Si $m = -1 \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \rightarrow$ Coincidentes (S. Comp. Indet.) ; Si $m = -1/2$ $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \rightarrow 3x + 2y = 1 \\ 3/2\, x + y = 1 \xrightarrow{(x2)} 3x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow$ Paralelas (S. Incompatible)

$\left.\begin{array}{l} m \neq -1 \\ m \neq -1/2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Secantes

c) Si $m = 5$ $\begin{cases} 3x + 3y = -9 \\ -15x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(x5)} \begin{cases} \cancel{15x} + 15y = -45 \\ -\cancel{15x} + y = 1 \end{cases}$

$$16y = -44$$

$$; \; y = \frac{-44}{16} = -\frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} 3x + \cancel{3y} = -9 \\ (x\text{-}3) \; +45x - \cancel{3y} = -3 \end{cases}$$

$$48x = -12 \; ; \; x = \frac{-12}{48} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Solución } (-1/4, -11/4)}$$

18)
a) $\begin{cases} x-2y = -3 \\ -2x+3y+z=4 \end{cases} \xrightarrow{(\times 2)} \begin{cases} 2x-4y = -6 \\ -2x+3y+z=4 \end{cases}$ +
$-y+z=-2$

$\begin{cases} z=z \\ y=z+2 \\ x=2z+4-3=2z+1 \end{cases} \Rightarrow$ S. compatible INDET.

b) Si se cortan en una recta, cualquiera que sea múltiplo de $-y+z=-2$ valdrá:

$\begin{cases} x-2y = -3 \\ -2x+3y+z=4 \\ -y+z=-2 \end{cases}$

19) x = Edad actual Madre
y = " " Padre
z = " " Hijo

$\begin{cases} x=3z \\ x+y+z=80 \\ x+5+z+5=y+5+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \quad -3z=0 \\ x+y+z=80 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1-F_2 \\ F_1-F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -80 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) F_2+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -80 \\ 0 & 0 & -8 & -80 \end{array}\right)$

$z=\frac{-80}{-8}=10$
$-y-40=-80$; $y=40$
$x+40+10=80 \rightarrow x=30$

SOL: la madre tiene 30 años, el padre 40 años y el hijo, 10 años.

20) x: nº hombres
y = nº mujeres
z = nº niños

$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y \quad =1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1-F_2 \\ F_1-F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right)$

$4z=20 \rightarrow z=5 \rightarrow 2y+5=19$; $y=7$ $x+5+7=20 \rightarrow x=8$

SOL: Fueron de excursión 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños

21) x y $\begin{cases} 10x+y+18=10y+x \\ x+y=16 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x-9y=-18 \\ x+y=16 \end{cases} \xrightarrow{(\times 9)} \begin{cases} 9x-\cancel{9y}=-18 \\ 9x+\cancel{9y}=144 \end{cases}$
$18x = 126$

$x=\frac{126}{18}=7$
$y=16-7=9$

SOL: El nº es el 79

22) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz de coef. de un sist. homogéneo

a) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+6y=0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} \cancel{2x}+y=0 \\ -\cancel{2x}-12y=0 \end{cases}$
$-11y=0 \rightarrow y=0$

$2x=0 \rightarrow x=0$ SOL: $x=0$, $y=0$ Sist. compatible det.

b) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 5x+2y=1 \\ 2x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$F_1 \leftrightarrow F_3$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ -5F_1+F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{-3F_2+F_3}{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -y=-3 \rightarrow y=3$
$x+3=2 \rightarrow x=-1$

SOL $x=-1$, $y=3$ S. comp. det.

23) L = espectadores que fueron el lunes
M = " " " " Martes
X = " " " " Miércoles

$\begin{cases} M=1'12\,L \\ X=0'88\,M \\ L=X+36 \end{cases}$ → Por sustitución

$X=0'88 \cdot 1'12\,L \Rightarrow X=0'88\cdot 1'12 \cdot (X+36)$
$X=0'9856\,X+35'4816$

$X-0'9856\,X=35'4816$; $X(1-0'9856)=35'4816$; $X=\frac{35'4816}{1-0'9856}=2464$

$L=2464+36=2500$; $M=1'12\cdot 2500=2800$

SOL: El L. fueron 2500 espect., el M, 2800 y el Miércoles 2464.

(24) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ tx \quad +2z=0 \\ 2x-y+tz=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & t \end{vmatrix} = -t+4-(t^2-2)$; $-t^2-t+6 \Rightarrow$ Rango.

si $-t^2-t+6 \neq 0$ rango 3
$-t^2-t+6=0 \rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1\pm 5}{-2}$ $\nearrow t=-3$ $\searrow t=2$

$t\neq 2$, $t\neq -3$ S. comp. determinado   sol: $x=y=z=0$

$t=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -2y=0 \\ -3y=0 \end{array} \Big\} y=0$

$x+z=0$; $x=-z$

S. comp. indeterm.

$t=-3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2+ \\ F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$3y+5z=0$; $z=z$
$y=-\frac{5}{3}z$
$x=-y-z=\frac{5}{3}z-z=\frac{2}{3}z$

S. comp. indet.

si $z=1$
$\begin{cases} x+y+1=0 \\ tx \quad +2=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ según la 2ª ec. $\Rightarrow t=-2/x \Rightarrow$ No indica nada, de momento

según lo anterior, si $t=2 \rightarrow 2=-\frac{2}{x}$; $2x=-2$; $x=-1 \rightarrow y=0$

sol $(-1,0,1)$

si $t=-3 \rightarrow$ (Mirando arriba) $\rightarrow$ $z=1$, $x=2/3$, $y=-5/3$

Para otros valores de t, no hay solución.