TRIGONOMETRIA PLANA (ELEMENTAL)

1.- Sistemas de medida

A) Sistema SEXAGESIMAL (DEG en calculadora): $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ Ej: $29^\circ 17' 42''$. 1 recto $= 90^\circ$

B) Sistema CENTESIMAL (GRA): $1^g = 100^m$, $1^m = 100^s$. Ej: $79^g 84^m 75^s$. 1 recto $= 100^g$

C) RADIANES (RAD) $\rightarrow$ 1 radian $= \dfrac{360^\circ}{2\pi}$. 1 recto $= \dfrac{\pi}{2}$ radianes.

2.- Operaciones

A) SUMA: $37^\circ 45' 72'' + 43^\circ 29' 56'' = 80^\circ 74' 128'' = 80^\circ 76' 8'' = \underline{81^\circ 16' 8''}$

B) RESTA: $7^\circ 4' 56'' - 4^\circ 25' 58'' = 6^\circ 64' 56'' - 4^\circ 25' 58'' = 6^\circ 63' 116'' - 4^\circ 25' 58'' = \underline{2^\circ 38' 58''}$

C) PRODUCTO: $(87^\circ 42' 36'') \cdot 7 = 609^\circ 294' 252'' \rightarrow$ $294 \,\underline{|60}$ → $54''$ $4'$; $609^\circ \cancel{14}' 306'' \rightarrow$ $306 \,\underline{|60}$ → $06''$ $5'$

$= \underline{609^\circ 9' 6''}$

D) DIVISION $\rightarrow$ $71^\circ 49' 38'' \,\underline{|5}$

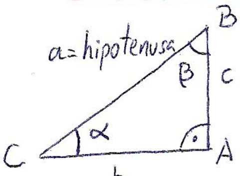
21   $1^\circ \rightarrow 60'$ $240''$ $\boxed{14^\circ 21' 55''}$

$109'$ 278

09 28

$4'$ $\boxed{3''}$

3.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo



a = hipotenusa

c = cateto contiguo a β = cateto opuesto a α

b cateto opuesto a β = cateto contiguo a α

$\overset{\triangle}{ABC}$ = Triángulo rectángulo

α = ángulo agudo ($0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$)

a, b y c expresados en la misma longitud.

RAZONES DIRECTAS
- seno de $\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ (SIN en calculadora)
- coseno de $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ (cos)
- tangente de $\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

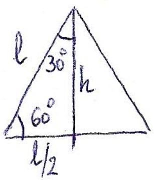
Las razones trigonométricas son adimensionales.

$0 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$. $0 \le \cos\alpha \le 1$ $-\infty \le \operatorname{tg}\alpha \le \infty$

RAZONES INVERSAS
- cosecante de $\alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
- secante de $\alpha = \sec\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
- cotangente de $\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

4.- Razones de 30°, 45° y 60°

T. equilátero:



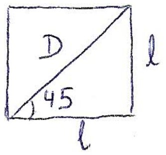
Por Pitágoras $\Rightarrow l^2 = h^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$; $l^2 = h^2 + \dfrac{l^2}{4} \rightarrow l^2 - \dfrac{l^2}{4} = h^2$; $h = \sqrt{\dfrac{3l^2}{4}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} l$.

$\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{l}{2} : l = \dfrac{1}{2}$ $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l : l = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \dfrac{l}{2} : l = \dfrac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Cuadrado

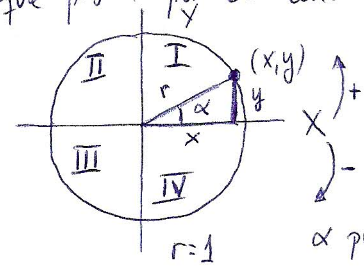


$D^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$; $D = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}\, l$

$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = l : \sqrt{2}\, l = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5.- Razones de un ángulo cualquiera.

Supongamos una circunferencia de radio 1, dividida por 2 ejes perpendiculares que pasan por el centro (Circunferencia Goniométrica).



Cualquier punto de la circunferencia, tendrá coordenadas (x, y)

Entonces → r = hipotenusa = 1; x, y = catetos

$\operatorname{sen}\alpha = y$
$\cos\alpha = x$
$\operatorname{tg}\alpha = y/x$

Estos valores van a ser positivos o negativos según el cuadrante en donde esté el ángulo.

α puede ser cualquier ángulo.

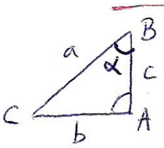
También hablamos de ángulos positivos o negativos según el sentido de giro (+ ⇒ contrario agujas reloj).

Cuadrante:	I $(0^\circ,90^\circ)$	II $(90^\circ,180^\circ)$	III $(180^\circ,270^\circ)$	IV $(270^\circ,360^\circ)$
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−

SIGNO ⇒

Un ángulo mayor de 360°, significa que ha dado más de una vuelta.

6.- Fórmula fundamental de la Trigonometría. Fórmulas para resolver triángulos



Por Pitágoras ⇒ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\text{Divido entre } a^2} 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$

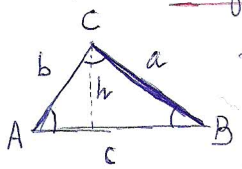
Suponiendo α el ángulo de referencia ⇒ $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Sabiendo que $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$, de la fórmula anterior se deducen:

$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$

$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$

- En el caso de triángulos no rectángulos, usaremos el teorema del seno y el teorema del coseno:

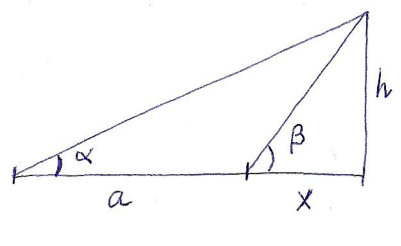


Teorema del seno: $\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}}$

Teorema del coseno:
$$\boxed{\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}}$$

Resolver un triángulo es conocer sus 3 lados y sus 3 ángulos.
La suma de los 3 ángulos de un triángulo es 180°. Si el triángulo es rectángulo, usaremos el T^a de Pitágoras y los conceptos de razones trigonométricas.
Si el triángulo no es rectángulo, usaremos T^a del seno y del coseno (También válidos por otra parte para triángulos rectángulos).

7.- Método de la doble observación



Supongamos que queremos hallar h, desconociendo asimismo x.
Supongamos además que α = 30°, β = 45° y a = 600 m.
Aplicando el concepto de tangente y utilizando un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}45^\circ = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg}30^\circ = \dfrac{h}{x+360^\circ} \end{cases}$$

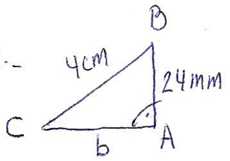
→ Usando la calculadora para el cálculo de tangentes, y resolviendo el sistema:

$\boxed{h = 81'96\ m}$

EJERCICIOS TRIGONOMETRIA ELEMENTAL

1.- Aplicando la definición de razón trigonométrica, y sin ayuda de la calculadora, halla el resto de razones directas para los siguientes casos:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $\cos\beta = \frac{1}{5}$ c) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{9}$ (α, β y γ son ángulos agudos)

2.- 

Dado el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$, hallar b y los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{B}$.

3.- Resuelve los siguientes T. rectángulos, con los datos que se dan (Calcular los 3 lados y los 3 ángulos):

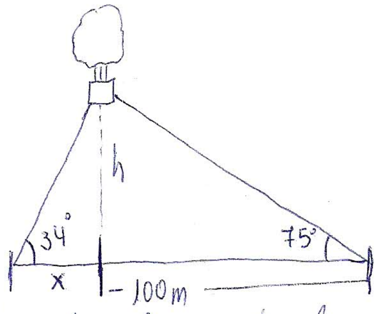
a) $a = 20$ cm (hipotenusa) y $\hat{B} = 24^\circ 17' 42''$

b) $c = 15$cm (un cateto) y $\hat{C} = 7^\circ 35'$

c) $b = 34'2$cm, $c = 15'4$cm

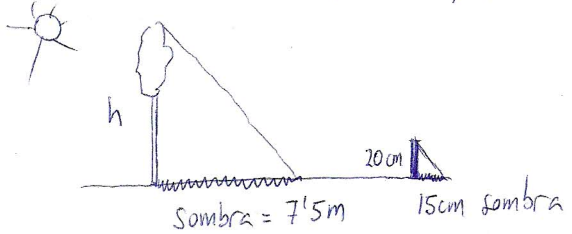
4.- Hallar la apotema de un pentágono regular de lado 6cm.

5.- Si la apotema de un hexágono regular es de 4 cm. ¿Cuánto mide el lado?

6.- 

Dos observadores separados 100 m observan un globo con un ángulo de 34° y 75° respectivamente. ¿Qué altura tiene el globo?

7.- Utilizando el concepto de proporcionalidad, halla la altura del árbol:



Un árbol tiene en un momento del día, una sombra de 7'5m.
A la misma hora, un palo vertical de 20cm tiene una sombra de 15cm.
¿Cuánto mide el árbol?

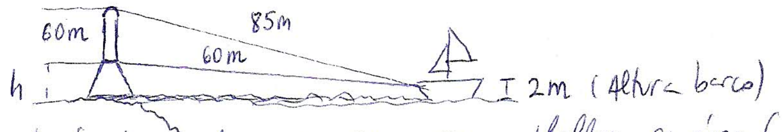
8.- Resuelve los siguientes triángulos no rectángulos (usando teorema del seno o del coseno)

a) $\begin{cases} b = 4\text{ cm} \\ c = 3\text{ cm} \\ \hat{C} = 22^\circ \end{cases}$ b) $\begin{cases} \hat{A} = 47^\circ 17' 43'' \\ \hat{B} = 69^\circ 7' 35'' \\ b = 8'4\text{ cm} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \hat{A} = 34^\circ 12' \\ \hat{B} = 29^\circ 15' \\ c = 73'4\text{ cm} \end{cases}$

9.- Demuestra de forma razonada la igualdad o falsedad de:

a) $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$ b) $\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$ c) $\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$

10.- Halla el valor de h:



11.- Los 3 lados de un triángulo miden 20m, 30m y 40m. Hallar su área $\left(A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)$

p = semiperímetro.
a, b y c lados.

RESOLUCIÓN TRIGONOMETRÍA

1 a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{c.op}{h}$; PITÁGORAS $\rightarrow 5^2 = (\sqrt{2})^2 + (c.\text{contiguo})^2$; $(c.c)^2 = 23$; $cc = \sqrt{23}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}}$; $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{23}} = \boxed{\frac{\sqrt{46}}{23}}$

b) $\cos\beta = \frac{1}{5}$; $5^2 = 1^2 + (c\,op)^2$; $c.op = \sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$; $\text{sen}\,\beta = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$; $tg\,\beta = \frac{2\sqrt{6}}{1} = \boxed{2\sqrt{6}}$

c) $tg\,\gamma = \frac{4}{9}$; $(\text{hipotenusa})^2 = 4^2 + 9^2 = 97$; $\text{hipotenusa} = \sqrt{97}$; $\text{sen}\,\gamma = \frac{4}{\sqrt{97}} = \boxed{\frac{4\sqrt{97}}{97}}$; $\cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{97}} = \boxed{\frac{9\sqrt{97}}{97}}$

2 $a = 4\,cm$
$c = 24\,mm = 2'4\,cm$

$b = \sqrt{4^2 - 2'4^2} = \boxed{3'2\,cm}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{2'4}{4} \rightarrow \hat{C} = \text{arc sen}\,\frac{2'4}{4} = \boxed{36^\circ 52' 11{,}63''}$

$\cos\hat{B} = \frac{2'4}{4} \rightarrow \hat{B} = \text{arc cos}\,\frac{2'4}{4} = \boxed{53^\circ 7' 48{,}37''}$

3 a) $\boxed{a = 20\,cm}$. $\boxed{\hat{B} = 24^\circ 17' 42''}$ $\boxed{\hat{A} = 90^\circ}$ $\hat{C} = 90^\circ - 24^\circ 17' 42'' = \boxed{65^\circ 42' 18''} = \hat{C}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$; $b = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} = 20 \cdot \text{sen}\,24^\circ 17' 42 = \boxed{8'23\,cm}$; $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$; $c = 20 \cdot \cos 24^\circ 17' 42'' = \boxed{18'23\,cm}$

b) $\boxed{c = 15\,cm}$ $\boxed{\hat{C} = 7^\circ 35'}$ $\boxed{\hat{A} = 90^\circ}$ $\hat{B} = 90^\circ - 7^\circ 35' = \boxed{82^\circ 25'} = \hat{B}$; $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a}$; $a = \frac{c}{\text{sen}\,C} = \frac{15}{\text{sen}\,7^\circ 35'} = \boxed{113'66\,cm}$

$\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$; $tg\,\hat{C} = \frac{c}{b}$; $b = \frac{c}{tg\,\hat{C}} = \frac{15}{tg\,7^\circ 35'} = \boxed{112'67\,cm}$

c) $\boxed{b = 34'2\,cm}$, $\boxed{c = 15'4\,cm}$; $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{34'2^2 + 15'4^2} = \boxed{37'51\,cm}$ $\boxed{\hat{A} = 90^\circ}$

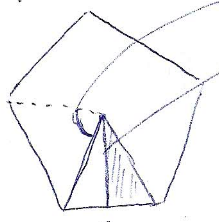
$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \hat{B} = \text{arctg}\,\frac{b}{c}$; $\hat{B} = \text{arc tg}\,\frac{34'2}{15'4} = \boxed{65^\circ 45' 29{,}97''}$; $tg\,\hat{C} = \frac{c}{b}$; $\hat{C} = \text{arctg}\,\frac{15'4}{34'2} =$

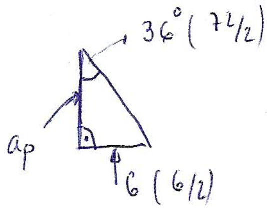
$\boxed{\hat{C} = 24^\circ 14' 30{,}03''}$

4

Angulo central: $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

a_p = apotema

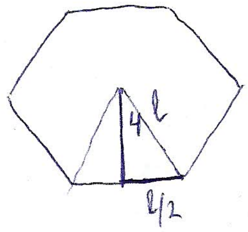




Tenemos un T. rectángulo. Por trigonometría:

$tg\,36^\circ = \frac{6}{a_p}$; $a_p = \frac{6}{tg\,36^\circ} = \boxed{8'26\,cm}$

5



Como es un hexágono regular, los triángulos que se forman son equiláteros.
Usando por ejemplo Pitágoras:

$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$; $l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \xrightarrow{x(4)} 4l^2 = 64 + l^2$; $3l^2 = 64$

$l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \boxed{4'62\,cm} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\,cm$

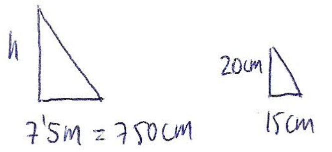
6 Es el método de la doble observación.
Hacemos un sistema con tangentes, si queremos calcular las 2. Si sólo queremos h (2ª ec)

$$\begin{cases} tg\,34^\circ = \frac{h}{x} & \rightarrow h = x \cdot tg\,34^\circ \\ tg\,75^\circ = \frac{h}{100} & \rightarrow h = 100 \cdot tg\,75^\circ \end{cases}$$

$x \cdot tg\,34^\circ = 100 \cdot tg\,75^\circ$; $x = \frac{100\,tg\,75^\circ}{tg\,34^\circ}$

$h = 100 \cdot tg\,75^\circ = \boxed{373'21\,m}$

(7) Es un problema de semejanza de triángulos.



$\frac{h}{20} = \frac{750}{15}$; $h = \frac{750 \cdot 20}{15} = \boxed{1000\ cm = 10\ m}$

(8) a) $\boxed{b = 4cm}$, $\boxed{c = 3cm}$, $\boxed{\hat{C} = 22^\circ}$, $\frac{b}{sen \hat{B}} = \frac{c}{sen \hat{C}}$; $\frac{4}{sen \hat{B}} = \frac{3}{sen 22^\circ}$; $sen \hat{B} = \frac{4 \cdot sen 22^\circ}{3}$

$\hat{B} = arc\ sen \frac{4 \cdot sen 22^\circ}{3} = \boxed{29^\circ 57' 55,09''}$ $\quad \hat{A} = 180^\circ - (22^\circ + 29^\circ 57' 55,09'') = \boxed{128^\circ 02' 04,91''}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; $a = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 128^\circ 02' 04,91''} = \boxed{6'31\ cm}$

b) $\boxed{\hat{A} = 47^\circ 17' 43''}$ $\boxed{\hat{B} = 69^\circ 7' 35''}$ $\hat{C} = 180^\circ - (47^\circ 17' 43'' + 69^\circ 7' 35'') = \boxed{63^\circ 34' 42''}$

$\boxed{b = 8'4\ cm}$ $\quad \frac{a}{sen\ 47^\circ 17' 43''} = \frac{8'4}{sen\ 69^\circ 7' 35''} = \frac{c}{sen\ 63^\circ 34' 42''} \Rightarrow$

$a = \frac{8'4 \cdot sen\ 47^\circ 17' 43''}{sen\ 69^\circ 7' 35''} = \boxed{6'61\ cm}$ $\quad c = \frac{8'4\ sen\ 63^\circ 34' 42''}{sen\ 69^\circ 7' 35''} = \boxed{8'05\ cm}$

✗ c) $\boxed{\hat{A} = 34^\circ 12'}$ $\boxed{\hat{B} = 29^\circ 15'}$ $\hat{C} = 180^\circ - (34^\circ 12' + 29^\circ 15') = \boxed{116^\circ 33'}$

$\boxed{c = 73'4\ cm}$ $\quad a = \frac{73'4 \cdot sen\ 34^\circ 12'}{sen\ 116^\circ 33'} = \boxed{46'12\ cm}$ $\quad b = \frac{73'4\ sen\ 29^\circ 15'}{sen\ 116^\circ 33'} = \boxed{40'09\ cm}$

(9) Sabiendo que $sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

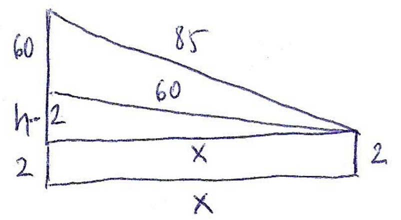
a) $\frac{tg\,a + tg\,b}{\frac{1}{tg\,a} + \frac{1}{tg\,b}} = tg\,a \cdot tg\,b$; $\frac{tg\,a + tg\,b}{\frac{tg\,a + tg\,b}{tg\,a \cdot tg\,b}} = tg\,a \cdot tg\,b$; $\frac{\cancel{(tg\,a + tg\,b)}}{\cancel{(tg\,a + tg\,b)}} \cdot tg\,a \cdot tg\,b = tg\,a \cdot tg\,b$

$= tg\,a \cdot tg\,b = tg\,a \cdot tg\,b$ $\boxed{✓}$

b) $\frac{1 - sen\,\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + sen\,\alpha}$; $(1 - sen\,\alpha)(1 + sen\,\alpha) = \cos^2 \alpha$; $1 - sen^2 \alpha = \cos^2 \alpha$; $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ $\boxed{✓}$

c) $sen^4 x - sen^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$; $sen^2 x (sen^2 x - 1) = \cos^2 x (\cos^2 x - 1)$;
$sen^2 x \cdot (-\cos^2 x) = \cos^2 x \cdot (-sen^2 x)$; $-sen^2 x \cos^2 x = -sen^2 x \cos^2 x$ $\boxed{✓}$

(10)



$\begin{cases} 85^2 = (60 + h - 2)^2 + x^2 \\ 60^2 = (h - 2)^2 + x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 7225 = 3364 + 116h + h^2 + x^2 \\ 3600 = h^2 - 2h + 4 + x^2 \end{cases}$
$x^2 = 3600 - h^2 + 2h - 4$ → Sustituyendo

$7225 = 3364 + 116h + \cancel{h^2} + 3600 - \cancel{h^2} + 2h - 4$

$7225 = 6960 + 118h$; $h = \frac{7225 - 6960}{118} = \boxed{2'25\ m}$

(11) A: Fórmula de Herón

$p = \frac{20 + 30 + 40}{2} = 45m$ $\quad A = \sqrt{45 \cdot (45 - 20) \cdot (45 - 30) \cdot (45 - 40)} = \boxed{290'47\ m^2}$