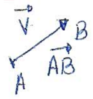
UNIDAD 5: GEOMETRIA ANALITICA EN EL PLANO

1. Vector. Módulo de un vector



Un vector es un segmento orientado. Así, el vector $\vec{AB}$ tiene su origen en A y su punto final en B.

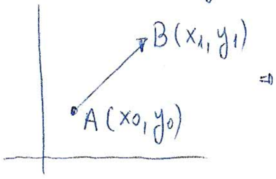


FIGURA 1

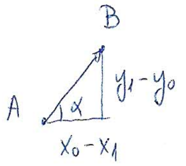


FIGURA 2

Los vectores quedan caracterizados si conocemos:

1) Dirección: Recta sobre la que está el vector o cualquier paralela a ella

2) Sentido: Una dirección tiene 2 sentidos. Así el vector $\vec{AB}$ va de A a B y $\vec{BA}$, va de B a A.

3) Módulo: Longitud del segmento correspondiente

Dicho esto, todos los vectores que tengan el mismo módulo, dirección y sentido son iguales, y por tanto representan al mismo vector.

Nosotros, para facilitar cálculos, cogeremos como representante aquel vector cuyo origen coincida con el origen de coordenadas:

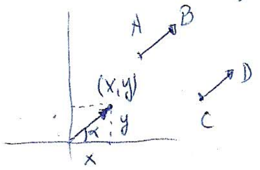


FIGURA 3

Módulo de un vector: Es una longitud, que podemos hallar aplicando el Teorema de Pitágoras (Figura 2). El módulo de $\vec{AB}$ lo expresamos como $|\vec{AB}|$

$$\boxed{|\vec{AB}| = \sqrt{(y_1-y_0)^2 + (x_1-x_0)^2}}$$

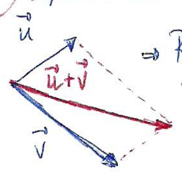
Si el vector tiene su origen A en (0,0) y $B(x,y) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{x^2+y^2}$

Para abreviar, en vez de usar 2 letras para definir un vector, usaremos solo una ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, etc).

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ → Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son Equipolentes, significa que $\boxed{\vec{u} = \vec{v}} \Rightarrow (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son Paralelos ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) → $\boxed{\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1}}$

2. Operaciones con vectores



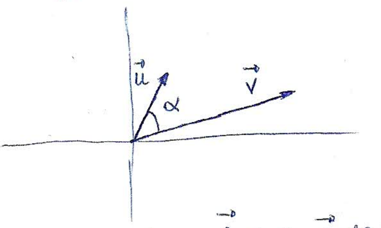
⇒ Regla del Paralelogramo

Suma → $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Resta → $\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

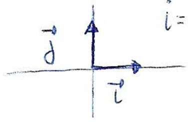
Producto de un vector por un escalar, K ($K \in \mathbb{R}$) → $K\vec{u} = K(u_1, u_2) = (Ku_1, Ku_2)$

3. Producto escalar de vectores. Propiedades



El producto escalar de 2 vectores, que representaremos por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, es un número, que proviene de multiplicar los módulos de los 2 vectores por el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha}$$



$\vec{i} = (1,0)$; $\vec{j} = (0,1)$ ⇒ $\vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ (Usando prop. del producto por un escalar)

$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1 v_1 \vec{i}\cdot\vec{i} + \cancel{u_1 v_2 \vec{i}\cdot\vec{j}}^{\,0} + \cancel{u_2 v_1 \vec{j}\cdot\vec{i}}^{\,0} + u_2 \cdot v_2 \vec{j}\cdot\vec{j}$$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cos 90° = 0$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Propiedades P. escalar

1) $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \geq 0$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

4) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares $\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

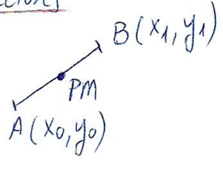
$\rightarrow u_1\cdot v_1 = u_2\cdot v_2$

Entonces, si $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\boxed{\text{si } \vec{u}=(u_1,u_2)\ ,\ \vec{v}=(-u_2,u_1) \text{ ó } \vec{v}=(u_2,-u_1)}$

$\hookrightarrow$ Dem: $(u_1,u_2)\cdot(-u_2,u_1) = -u_1u_2 + u_1u_2 = 0$

4.- Punto Medio de un segmento. Angulo entre 2 vectores

Punto Medio: Es la media de las coordenadas $\Rightarrow$



$$\boxed{PM = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)}$$

Angulo entre 2 vectores

A partir de la fórmula del producto escalar $\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$ Despejamos el $\cos\alpha$, y después hallamos la función arcocoseno:

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \arccos\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}$$

5.- Combinación Lineal de vectores (C.L). Dependencia e independencia lineal de vectores. Bases

Dados 3 vectores cualesquiera $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Decimos que $\vec{w}$ es combinación lineal (C.L) de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si hay 2 escalares α y $\beta\in\mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}}$$

- 2 vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes (L.I), si uno no es proporcional con el otro:

$\boxed{\vec{u}\neq K\cdot\vec{v}\ ,\ K\in\mathbb{R}} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son LI

- Por el contrario, 2 vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes (L.D) si uno de ellos es combinación lineal de otro.

$\boxed{\vec{u} = K\vec{v}\ ,\ K\in\mathbb{R}} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son L.D

Bases: En el plano, 2 vectores que sean Linealmente Independientes (LI), forman una Base.

Es decir, cualquier otro vector del plano se puede poner como Combinación Lineal de los vectores de la Base.

$B=\{\vec{u},\vec{v}\} \Rightarrow \boxed{\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

De todas las bases que podemos formar en el plano, la más cómoda es la formada por los vectores $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$, que llamaremos Base ORTONORMAL $\Rightarrow B=\{\vec{i},\vec{j}\}$

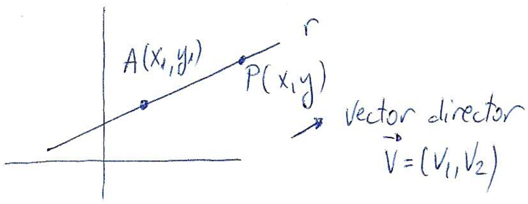
Por tanto, si $\vec{w}=(w_1,w_2) \rightarrow \boxed{\vec{w} = w_1\cdot(1,0) + w_2\cdot(0,1) = w_1\cdot\vec{i} + w_2\cdot\vec{j}}$

- Una Base con un punto fijo (que hace de origen) forman un sistema de referencia.

El sistema Cartesiano es un sistema de referencia que toma como origen $O(0,0)$ y como $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$

RECTAS EN EL PLANO

1.- Ecuación Vectorial de la recta



Una recta cualquiera estará determinada si conocemos un punto por el que pase y un vector director (un vector que tiene la misma dirección que la recta). Este vector director se podría calcular si conociera 2 puntos de la recta.

Supongamos entonces que nuestra recta r pasa por $A(x_1,y_1)$ y lleva la dirección de $\vec{v}=(v_1,v_2)$.
Cualquier otro punto $P(x,y)$ de la recta, se podrá calcular:

$$P = A + t\vec{v} \Rightarrow \boxed{(x,y)=(x_1,y_1)+t(v_1,v_2)} \rightarrow \text{ECUACIÓN VECTORIAL}$$
$$t \in \mathbb{R}$$

2.- Ecuaciones paramétricas

A partir de la vectorial $\Rightarrow (x,y)=(x_1,y_1)+t(v_1,v_2) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + t v_1 \\ y = y_1 + t v_2 \end{cases}}$ → ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$t \in \mathbb{R}$

3.- Ecuación continua

Despejando t de las paramétricas e igualando $\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-x_1}{v_1} \\ t = \dfrac{y-y_1}{v_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-x_1}{v_1} = \dfrac{y-y_1}{v_2}}$ → ECUACIÓN CONTINUA

Evidentemente, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$

4.- Ecuación General

A partir de la continua, quitando denominadores y haciendo cambio de variable:

* $v_2(x-x_1) = v_1(y-y_1) \Rightarrow v_2(x-x_1) - v_1(y-y_1) = 0$, $v_2 x - v_2 x_1 - v_1 y + v_1 y_1 = 0$ → Ordeno:

$v_2 x - v_1 y - v_2 x_1 + v_1 y_1 = 0$. Cambio de variable: $\boxed{\begin{cases} v_2 = A \\ -v_1 = B \\ v_1 y_1 - v_2 x_1 = C \end{cases}}$ ⇒ tendremos que:

$\boxed{Ax + By + C = 0}$ → Ecuación General. ⇒ Del cambio de variable y como $\vec{v}=(v_1,v_2)$, entonces ahora $\boxed{\vec{v}=(-B,A)}$

↳ También llamada Ec. Implícita.

5.- Ecuación Explícita

Despejando y de la ecuación general y haciendo un cambio de variable:

$By = -Ax - C$; $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ $\boxed{\begin{cases} -\dfrac{A}{B} = m = \text{pendiente} \\ -\dfrac{C}{B} = n = \text{ordenada en el origen} \end{cases}}$

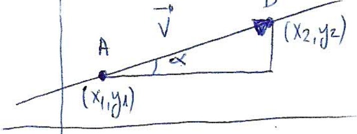
$\boxed{y = mx + n}$ → Ecuación EXPLÍCITA $\left(\text{Como } m = -\dfrac{A}{B} \text{ , } \begin{matrix} A = v_2 \\ B = -v_1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{v_2}{v_1}} \right)$

6.- Ecuación Punto-Pendiente

A partir de * $v_1(y-y_1) = v_2(x-x_1) \Rightarrow y - y_1 = \dfrac{v_2}{v_1}(x-x_1)$. Como $m = \dfrac{v_2}{v_1}$; $\boxed{y - y_1 = m(x-x_1)}$

↳ ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

7.- Significado geométrico de la pendiente



Supongamos 2 puntos conocidos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$. Las coordenadas de $\vec{AB}$, pueden ser usadas como vector director

$$\vec{AB} = B - A = (x_2,y_2)-(x_1,y_1) = (x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Entonces $m = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \operatorname{tg}\alpha$ (α es el ángulo que forma la recta con la horizontal).

Concluyendo, $\boxed{m = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{A}{B}}$

8.- Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ es la menor longitud de ese punto a la recta.

Ya sabemos que la distancia entre 2 puntos A y B es el módulo del vector $\vec{AB}$ (o $\vec{BA}$):

$\boxed{d(A,B) = |\vec{AB}| = |\vec{BA}|}$, es decir, si $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $d(AB) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

– Para calcular la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta $r: Ax + By + C = 0$ es

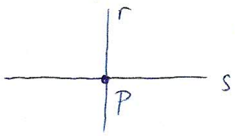
$$\boxed{d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

→ Si quiero hallar la distancia entre 2 rectas paralelas, hallo un punto de una de ellas y calculo la distancia de ese punto a la otra recta.

9.- Posiciones relativas de 2 rectas en el plano. Rectas paralelas y perpendiculares

A) 

Secantes (se cortan en un punto) ⇒ si son perpendiculares, el ángulo es de 90°

⟹ 

$r \perp s$ (perpendiculares)

B) 

Paralelas (Ningún punto en común).

C) 

Coincidentes (Todos los puntos son comunes).

Analíticamente, para saber su posición, resolvemos el sistema de ecuaciones y analizamos el nº de soluciones:

$$\begin{cases} r: Ax + By + C = 0 \\ s: A'x + B'y + C' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes (S. Compatible Determinado)} \Rightarrow m \neq m'$$

$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}}$ ⇒ r y s son $\boxed{\text{paralelas}}$ (S. Incompatible) ⇒ Tienen la misma pendiente ⇒ $\boxed{m = m'}$

$r: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

$s: y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$ ⇒

$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}}$ y además, $n \neq n'$

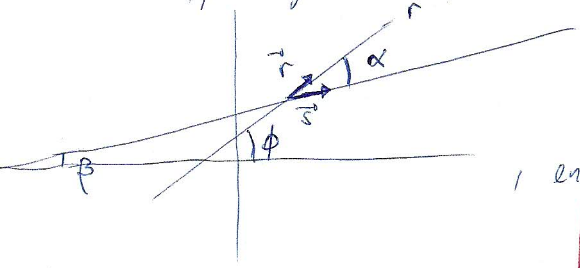
$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$ → r y s son $\boxed{\text{coincidentes}}$ $\begin{cases} m = m' \\ n = n' \end{cases}$ (S. Compatible Indeterminado)

10.- Ángulo entre 2 rectas

El ángulo que forman 2 rectas r y s es el que forman sus vectores de dirección.

Del concepto de producto escalar, sabemos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \alpha$

También, por trigonometría, sabemos que $tg(\phi - \beta) = \frac{tg\,\phi - tg\,\beta}{1 + tg\,\phi\; tg\,\beta}$ $\begin{cases} tg\,\phi = m = \text{pendiente } r \\ tg\,\phi = m' = \text{pendiente } s \end{cases}$



Si llamamos $\vec{r}$ y $\vec{s}$ a vectores de dirección de r y s, entonces ⇒ $\vec{r} \cdot \vec{s} = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cos \alpha$ ⇒

$$\boxed{\alpha = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{s}|}}$$

Además, como $\alpha = \phi - \beta$; $\boxed{tg\,\alpha = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}}$

→ Si las rectas son $\boxed{\text{perpendiculares}}$, $\alpha = 90°$ → $tg\,90° = \nexists$ ⇒ Porque el denominador se hace 0.

$1 + mm' = 0 \Rightarrow \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$ ó $\boxed{mm' = -1}$

PROBLEMAS RESUELTOS

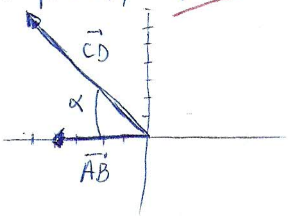
1.- Sean $A(1,2)$ y $B(-3,2)$ el punto origen y final de $\vec{AB}$. Del mismo modo, sean $C(3,-1)$ y $D(-2,6)$ las coordenadas de $\vec{CD}$. Calcular:

a) Coordenadas de $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ b) $2\vec{AB}-3\vec{CD}$ c) Módulos de $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ d) Producto escalar de ambos vectores e) Ángulo que forman f) ¿Forman Base? g) Expresar $\vec{u}=(-1,3)$ como combinación lineal de ambos vectores.

a) $\vec{AB}=B-A=(-3,2)-(1,2)=(-3-1,2-2)=\underline{(-4,0)}$ $\quad\vec{CD}=D-C=(-2,6)-(3,-1)=(-2-3,6-(-1))=\underline{(-5,7)}$

b) $2\vec{AB}-3\vec{CD}=2(-4,0)-3(-5,7)=(-8,0)+(15,-21)=\underline{(7,-21)}$

c) $|\vec{AB}|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=\underline{4}$; $|\vec{CD}|=\sqrt{(-5)^2+7^2}=\sqrt{25+49}=\underline{\sqrt{74}}$



d) $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=(-4,0)\cdot(-5,7)=-4\cdot(-5)+0\cdot7=\underline{20}$

e) $\cos\alpha=\dfrac{20}{4\cdot\sqrt{74}}\rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{20}{4\cdot\sqrt{74}}=\underline{54^\circ 27' 44{,}36''}$

(En este caso, $\alpha<90^\circ$

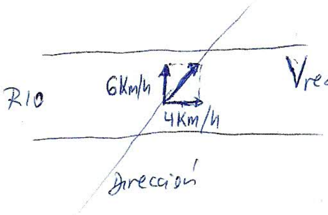
f) Para que formen Base, deben ser linealmente independientes. Es decir, no debe de haber ningún $K\in\mathbb{R}$, tal que $\vec{AB}=K\cdot\vec{CD}$; $(-4,0)=K(7,-21)=\begin{cases}-4=7K\rightarrow K=-4/7\\0=-21K\rightarrow K=0\end{cases}\rightarrow$ Imposible (distinto valor).

Por tanto, forman base.

g) $(-1,3)=p(-4,0)+q(7,-21)\Rightarrow\begin{cases}-1=-4p+7q\\3=-21q\rightarrow q=-\frac{3}{21}=-1/7\end{cases}$; $4p=1+7q$; $4p=1+7\cdot(-1/7)=0$; $p=0$

Entonces $\rightarrow(-1,3)=0\cdot(-4,0)-1/7(7,-21)=-1/7(7,-21)$

2.- Un nadador quiere atravesar un río. Nada a una velocidad de 6 Km/h en dirección perpendicular a las orillas, pero la corriente lo desplaza con una velocidad de 4 Km/h.
Hallar la velocidad real del nadador y su dirección.

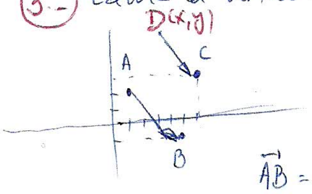


V_{real} = Módulo del vector suma

$\rightarrow\vec{V}_{nadador}=(0,6)$ $\quad\vec{V}_{real}=(0,6)+(4,0)=(4,6)$

$\vec{V}_{rio}=(4,0)$ $\quad|\vec{V}_{real}|=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=\boxed{7'2\text{ Km/h}}$

3.- Calcula el vertice D de un paralelogramo ABCD, sabiendo que $A=(1,2)$, $B=(5,-1)$ y $C=(6,3)$



Paralelogramo $\Rightarrow$ lados paralelos.
Si me dicen que es un vector ABCD, y tal como está el dibujo, $D(x,y)$ debe de estar por esa zona:

$\vec{AB}=\vec{DC}$: $B-A=C-D\Rightarrow(5,-1)-(1,2)=(6,3)-(x,y)$; $(4,-3)=(6-x,3-y)\begin{cases}6-x=4\\3-y=-3\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{matrix}x=2\\y=6\end{matrix}\Rightarrow\boxed{D=(2,6)}$

4.- Determina un vector ortogonal a $\vec{a}=(1,7)$, y de igual módulo.
Sea $\vec{b}$ este vector. Si es ortogonal significa que $\vec{a}\perp\vec{b}$ (son perpendiculares). Por tanto, si $\vec{b}=(x,y)$:

$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow(1,7)\cdot(x,y)=0\Rightarrow x+7y=0\Rightarrow x=-7y\\|\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=50\Rightarrow(-7y)^2+y^2=50;\ 49y^2+y^2=50;\ 50y^2=50\end{cases}$

$y=\pm1\rightarrow$ $y=1\rightarrow x=-7\Rightarrow\boxed{(-7,1)}$ (2 sol.)
$y=-1\rightarrow x=7\Rightarrow\boxed{(7,-1)}$

(5) Dada la recta que pasa por $A(1,2)$ y $B(4,3)$, halla distintas ecs. de esta recta.

Ec. vectorial $\rightarrow (x,y) = (1,2) + t\vec{v} =$ $\qquad \vec{v}$ = vector dirección $= \vec{AB} = B - A = (4,3) - (1,2) = (3,1)$

$= (x,y) = (1,2) + t(3,1)$

Ecs. paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$ $\rightarrow$ Continua $\nearrow t = \frac{x-1}{3}$; $\searrow t = \frac{y-2}{1}$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1}$;

General $\rightarrow x - 1 = 3y - 6$; $x - 3y + 5 = 0$ $\qquad$ Explícita $\rightarrow -3y = -x - 5$; $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

(Deducimos que pendiente es $1/3$ y ordenada origen $5/3$).

Punto-pendiente $\rightarrow y - 2 = 1/3\,(x-1)$ (Cogiendo la pendiente $m = 1/3$ y $A(1,2)$. También podría haber cogido B)

(6) Sea $r: -2x + 3y + 2 = 0$. Hallar una paralela y una perpendicular a r que pase por $P(1,1)$. Hallar también la distancia de P a r.

$r' \parallel r \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow r': -2x + 3y + K = 0 \xrightarrow{\text{Pasa por } (1,1)} -2\cdot 1 + 3\cdot 1 + K = 0$; $K = -1$

$r': -2x + 3y - 1 = 0$

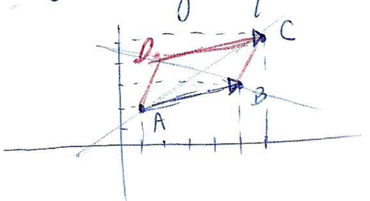
$r'' \perp r \rightarrow m \cdot m' = -1$; $m_r \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1/3 \Rightarrow m_r = 2/3$; $\frac{2}{3}\cdot m' = -1$; $m' = -\frac{3}{2}$

$r'': y = -\frac{3}{2}x + K \xrightarrow{\text{Pasa por } (1,1)} 1 = -\frac{3}{2} + K$; $2 = -3 + 2K$; $K = 5/2$

$r'': y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow 2y = -3x + 5$; $3x + 2y - 5 = 0 : r''$

Distancia P a r $\rightarrow d(P,r) = \left| \frac{-2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

(7) Halla el vértice D del paralelogramo ABCD, siendo $A(1,2)$, $B(5,3)$ y $C(6,5)$. Halla las ecuaciones de las diagonales AC y BD y comprueba que se cortan en su punto medio. ¿Qué ángulo forman?



$\vec{AB} = B - A = (5,3) - (1,2) = (4,1)$
$\vec{DC} = C - D = (6,5) - (x,y) = (6-x, 5-y)$
$\begin{cases} 6 - x = 4 \rightarrow x = 2 \\ 5 - y = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases} \rightarrow D(2,4)$

Recta AC $\rightarrow m = \frac{5-2}{6-1} = \frac{3}{5} \rightarrow y - 2 = \frac{3}{5}(x-1) \rightarrow 5y - 10 = 3x - 3$; $3x - 5y + 7 = 0$
$A(1,2)$; $C(6,5)$

Recta BD $\rightarrow m = \frac{4-3}{2-5} = \frac{1}{-3} \rightarrow y - 3 = -1/3\,(x-5) \rightarrow 3y - 9 = -x + 5$; $x + 3y - 14 = 0$
$B(5,3)$; $D(2,4)$

$PM_{AC} = PM_{BD} = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = (3'5, 3'5)$. Comprobamos que se cortan en el punto medio:

$\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ x + 3y - 14 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} \cancel{3x} - 5y + 7 = 0 \\ \cancel{-3x} - 9y + 42 = 0 \end{cases}$
$-14y + 49 = 0$; $y = \frac{-49}{-14} = \frac{49}{14} = \frac{7}{2} = 3'5$; $x + 10'5 = 14$; $x = 14 - 10'5 = 3'5$ (Comprobado).

Ángulo de las 2 rectas = ángulo de sus vectores directores (cogeremos el agudo). También, como sabemos las pendientes, podemos usar la fórmula de las pendientes $\rightarrow m_{AC} = 3/5$; $m_{BD} = -1/3$

$tg\,\alpha = \frac{3/5 - (-1/3)}{1 + 3/5 \cdot (-1/3)} \simeq 49°$

AUTOEVALUACIÓN

TOEVALUACIÓN

1) ¿Para qué valor de x los vectores $\vec{v}(3, x)$ y $\vec{w}(8, -6)$ son perpendiculares?

a) 4 b) 6 c) –4

2) La posición relativa de las rectas $2x + y - 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ es:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes

3) El ángulo que forman las rectas $r: \frac{x}{\sqrt{3}} = y$, $s: x + \sqrt{3}y + 1 = 0$, es:

a) 150° b) 30° c) 60°

4) El simétrico del punto $A(1, 1)$ respecto a la recta $x - 3y - 8 = 0$ es:

a) (3, –5) b) (2, –2) c) (–3, 5)

5) La recta que pasa por el punto (4, 1) y forma un ángulo de 30° con el eje OX, es:

a) $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ b) $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} = 0$ c) $x - \sqrt{3}y - 4 + \sqrt{3} = 0$

6) El área del triángulo de vértices (4, 8), (–2, 0) y (10, 5), es:

a) 53 u^2 b) 33 u^2 c) 66 u^2

7) Dos lados de un paralelogramo están en las rectas $3x - y + 6 = 0$, $x - y + 6 = 0$, y dos vértices opuestos son $A(-3, -3)$ y $C(4, 10)$. Las coordenadas de los otros vértices son:

a) (6, 0) y (1, 2) b) (0, 6) y (1, 1) c) (0, 6) y (1, -1)

8) El triángulo de vértices $A(1, 7)$, $B(8, 0)$ y $C(4, 8)$ tiene como circuncentro el punto:

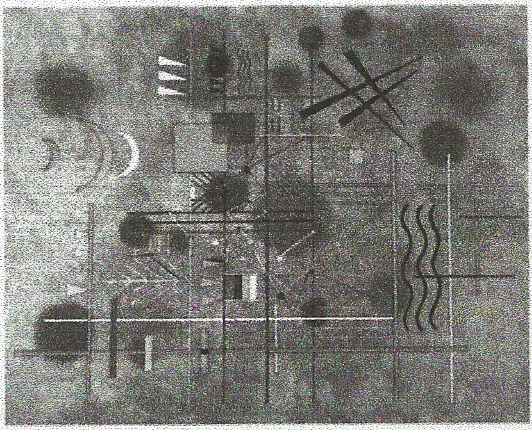
a) (4, 3) b) (3, 4) c) (–4, 3)

9) Un rectángulo $ABCD$ tiene los vértices $A(-3, 3)$ y $B(0, 5)$, y el vértice D pertenece a la recta $y + 3 = 0$. El área de dicho rectángulo es:

a) 52 u^2 b) 13 u^2 c) 26 u^2

10) ¿Cómo es el triángulo de vértices $A(3, 5)$, $B(6, 9)$ y $C(0, 9)$?

a) Rectángulo b) Equilátero c) Isósceles



↑ *Acuarela con tres puntos* de W. Kandinsky.