UNIDAD 5: LIMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

1- Límite de una función en un punto. Límites laterales

Límite de una función en un punto $x=a$ es el valor numérico hacia el que tienden o se aproximan los valores de la función cuando el valor de x se aproxima a a.

Así escribimos:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, que leeremos "límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

Evidentemente esta es una definición intuitiva del concepto de límite, ya que si hablamos con rigor habría que hablar de "entornos".

-Llamamos límite por la derecha al $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$. Asimismo, hablando del límite por la izquierda: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Habiendo definido estos límites laterales, podemos decir que una función tiene $\lim_{x \to a} f(x)$, cuando existen los 2 límites laterales y además son iguales:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L}$$

De lo anteriormente dicho, una función puede tener límite en $x=a$ y no existir $f(a)$.

Se dice que una función es convergente en $x=a$ cuando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, y éste es único.

2. Operaciones con límites.

En general en la mayoría de ocasiones, para calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ basta con hallar $f(a)$.

En el caso de que sea una función definida a trozos o no exista $f(a)$, habrá que estudiar los límites laterales.

Ej

A) $f(x) = x^2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2^2 = 4$

B) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0}$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ } No límite

C) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x)$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ } No límite

Al ser el límite un número, podemos operar con ellos.

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = L'$

a) $\lim_{x \to a} [f \pm g](x) = L \pm L'$ b) $\lim_{x \to a} [K f](x) = K \cdot L$ c) $\lim_{x \to a} [f \cdot g](x) = L \cdot L'$

d) $\lim_{x \to a} [f/g](x) = L/L' \ (L' \neq 0)$ e) $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ f) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = L^{L'} \ (L>0)$

3. Límites infinitos. Límites en el infinito

Puede ser que cuando $\lim_{x \to a} f(x)$, el valor sea muy grande. Entonces decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Ej: $\lim_{x \to 0} 1/x = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0'000\ldots} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{-0'000\ldots} = -\infty \end{cases}$ ⇒ En este caso, además de no coincidir los límites laterales, decimos que no hay límite.

También, podemos hablar de límites de funciones cuando a es muy grande:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Si alguno de estos valores es un número, entonces se habla de que existe el límite.

4.- Indeterminaciones

Las indeterminaciones que nos pueden aparecer en el cálculo de límites son:

a) ∞/∞ b) $0\cdot\infty$ c) $\frac{K}{0}$ d) $0/0$ e) $\infty-\infty$ f) 0^0 g) ∞^0 h) 1^∞

a) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ → se resuelven comparando grados → si tomamos el mayor grado del numerador (n), y el mayor grado del denominador (m):

$n>m$ → límite es infinito

$n=m$ → límite es un nº real, que será el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.

$n<m$ → límite es 0.

b) $\boxed{0\cdot\infty}$ → se transforman en $0/0$ ó ∞/∞

c) $\boxed{K/0}$ → se resuelven estudiando los límites laterales (que son del tipo infinito).

d) $\boxed{0/0}$ → Indica que hay la misma raíz en el numerador y en el denominador.

Si son funciones polinomicas, se factoriza por Ruffini y se simplifica.

Si son radicales, quitamos el radical (si está en un binomio, entonces podremos multiplicar y dividir por la expresión conjugada).

e) $\boxed{\infty-\infty}$ → Si son polinomios, operamos. Si hay radicales, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

f) $\boxed{0^0}$ g) $\boxed{\infty^0}$ ⇒ Se resuelven utilizando mét. alternativos (Regla de l'Hopital, etc), pero no son objetivo de este curso

h) $\boxed{1^\infty}$ → Son del tipo e, $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty = \boxed{e^{\lim_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}}$ → Expresión usada para resolverlos.

5.- Asíntotas y Ramas infinitas

Asíntotas Horizontales (A.H): La recta $y=y_0$ es A.H., cuando existe, al menos, uno de los siguientes límites: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0}$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0}$

Asíntota Verticales (A.V): La recta $x=x_0$ es A.V, cuando existe, al menos uno de estos límites: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty}$

Asíntota Oblicua (A.O): La recta $y=mx+n$ es A.O, si la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ cumple:

$\boxed{m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)\cdot x}}$; $\boxed{n=\lim_{x\to\infty}\left[-mx+\frac{f(x)}{g(x)}\right]}$ ⇒ 0 $\boxed{m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ ;\ n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]}$

Normalmente, para que esto suceda, el grado del numerador debe ser uno mayor que el denominador, y si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, basta con dividir para hallar A.O

Ramas parabólicas: Son aquellas que se cumple $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

6.- Funciones continuas

Una función es continua en $x=a$, si y solo si se cumplen las 3 condiciones siguientes.

$\boxed{1) \text{ Existe } \lim_{x\to a} f(x) \quad 2) \text{ Existe } f(a) \quad 3) \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$ → En caso contrario, diremos que es discontinua.

También se habla de continuidad por la derecha y por la izq. de un punto.

7.- Tipos de Discontinuidades

A) Evitable: Cuando existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y es finito, pero no coincide con $f(a)$ o bien $f(a)$ no existe.

B) No Evitable

1ª especie ⇒ Existen límites laterales

- Salto finito: Existen límites laterales, son distintos y finitos
- Salto infinito: Algún límite lateral es infinito.

2ª especie ⇒ Uno o los 2 límites laterales no existen

EJEMPLOS RESUELTOS

1.- Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} (x^2-2x+3)$ b) $\lim_{x\to 1^-} (x^3-1)$ c) $\lim_{x\to 2} \begin{cases} x-2 & \text{si } x<2 \\ x^2-4 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ d) $\lim_{x\to \infty} (x^3-2)$

a) $(1^2-2\cdot 1+3) = 1-2+3 = \boxed{2}$ b) $(1^3-1) = 1-1 = \boxed{0}$ c) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} (x-2) = 2-2=0 \\ \lim_{x\to 2^+} (x^2-4) = 4-4=0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 2} f(x) = 4$

d) $\lim_{x\to \infty} (x^3-2) = \infty^3-2 = \boxed{\infty}$

2.- Resuelve las siguientes indeterminaciones:

A) a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x^3+2}$ b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-2x}{x^3}$ c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3-2}{x^2}$ $\to$ Son todos del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\frac{\text{GRADO NUMERADOR 2}}{\text{GRADO DENOMINADOR 3}}$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \boxed{0}$

$2<3 \to$ lim. es 0

b) $\frac{\text{GRADO NUMERADOR 3}}{\text{GRADO DENOMINADOR 3}}$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-2x}{x^3} = \boxed{2}$

$3=3 \to$ Límite finito

c) $\frac{\text{GRADO NUMERADOR 3}}{\text{GRADO DENOMINADOR 2}}$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3-2}{x^2} = \frac{-(-\infty)^3}{(-\infty)^2} = \boxed{+\infty}$

$3>2 \to$ lim es $\pm\infty$

B) a) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ $\to$ Todos del tipo 0/0.

a) $\lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{(x+3)}} = -3-3 = \boxed{-6}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -9 \\ -3 & & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x-1) = 1-1 = \boxed{0}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x-1})^2}}{\cancel{(x-1)}\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1^- -1}} = \text{NO EXISTE} \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1^+-1}} = +\infty \end{array}\right\}$ NO EXISTE

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(\sqrt{x-2})^2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x-2})} = \frac{1}{4\cdot 0} = \frac{1}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \text{NO EXISTE} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ NO EXISTE

C) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$ $\to$ Tipo K/0 $\to$ $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) \ \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$ No EXISTE

D) a) $\lim_{x\to \infty} \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-3}{x}\right]$ b) $\lim_{x\to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}\right]$ $\to$ Tipo $0\cdot\infty$ e $\infty-\infty$. Se resuelven operando.

a) $\lim_{x\to \infty} \left[\frac{x^2-3}{x^2}\right] = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{GRADO 2}}{\text{GRADO 2}}$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{1}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x+2-x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x^2-4} = \frac{2}{0}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$ NO EXISTE

E) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x}$ $\to$ Tipo 1^∞ $\to$ $e^{\lim_{x\to\infty}\left[2x\cdot\left(\frac{x-2}{x+3}-1\right)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x\cdot(\cancel{x}-2-\cancel{x}-3)}{x+3}\right)}$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-10x}{x+3}} = \boxed{e^{-10}}$

3.- Halla las Asíntotas de las distintas funciones

a) $y = 2^x$ b) $y = \dfrac{x^2-2}{x^2-4}$ c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ d) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}$

a) NO A.V ni A.O

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2^{-\infty} = 0 \to AH \to \boxed{y=0}$

b) No A.O

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \to AH \boxed{y=1}$

$x = 2 \to \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{0}$ $\boxed{AV\ x=2}$

$x = -2 \to \lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{2}{0}$ $\boxed{AV\ x=-2}$

c) No A.O

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\text{GRADO } 1}{\text{GRADO } 2/2} = 1$

$\boxed{A.H\ y=1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\boxed{AH \to y=-1}$

$\sqrt{x^2-4} = 0 \to x^2-4 = 0 \left\langle \begin{matrix} x=2 \\ x=-2 \end{matrix} \right.$

$\boxed{A.V \text{ en } x=2 \text{ y } x=-2}$

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{\text{GRADO } 2}{\text{GRADO } 1}$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 3x + 2 & 2x-5 \\ \hline -\cancel{x^2} + 5/2x & 1/2x - 1/4 \\ -1/2\cancel{x} + 2 & \\ 1/2\cancel{x} - 5/4 & \\ \hline 3/4 & \end{array}$$

A.O $\boxed{y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}}$

ó $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{x^2-3x+2}{2x-5}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x} = 1/2$

$n = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5} - \dfrac{1}{2}x \right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{2x^2} - 6x + 4 - \cancel{2x^2} + 5x}{4x - 10} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x+4}{4x-10} = -\dfrac{1}{4}$

$\boxed{y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}}$; $AV \to 2x-5=0 \to x = 5/2 \to$

$\lim\limits_{x \to 5/2} f(x) = \dfrac{(5/2)^2 - 3 \cdot 5/2 + 2}{2 \cdot 5/2 - 5} = \dfrac{3/4}{0} \to \boxed{A.V\ x = 5/2}$

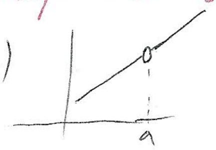
4.- $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2 \\ x^2-2 & -2 \le x < 3 \\ x & x \ge 3 \end{cases}$

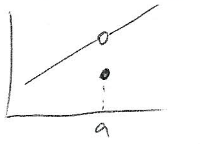
Estudiar la continuidad en $x=-2$ y $x=3$

$x=-2 \begin{cases} f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -(-2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = (-2)^2 - 2 = 2 \end{cases}$ $\Big\{ f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow$ CONTINUA $x=2$

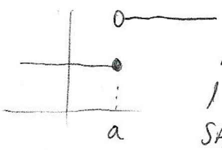
$x=3 \begin{cases} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = (3)^2 - 2 = 7 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 \end{cases}$ $\Big\}$ Distintos $\Rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \Rightarrow$ DISCONTINUA $x=3$

5.- Dibuja distintos tipos de discontinuidades

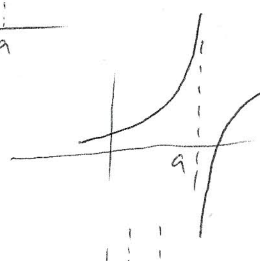
A) 

B) 

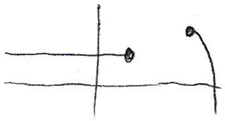
$\Rightarrow$ EVITABLE

C) 

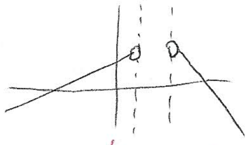
INEVITABLE
1ª ESPECIE
SALTO FINITO

D) 

INEVITABLE
1ª ESPECIE
SALTO INFINITO

E) 

INEVITABLE
2ª ESPECIE



INEVITABLE 2ª ESPECIE

6.- Halla K para que la función sea continua en f(x)

$f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x^2 + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $2K - 3 = 8 + 5$; $\boxed{K=8}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 8x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x^2 + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(2) = 13$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13$

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{si } x\le 2\\ 4x-kx^2 & \text{si } x>2\end{cases}$ tenga límite cuando x tienda a 2 es:

a) −1 b) 1 c) 2

2. El valor de $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-11x+24}$ es:

a) −2 b) 1 c) 2

3. El valor de a para que sea cierta la igualdad $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-a}{x^2-4x-12}=\dfrac{1}{2}$ es:

a) 2 b) 4 c) 1

4. El número de individuos, en miles, de una población de aves, viene dado por la expresión $N(t)=\dfrac{20+6t^2}{(2t-3)^2}$, siendo t el número de años transcurridos. Si la función fuese válida indefinidamente, el tamaño de la población a largo plazo sería de:

a) 1 000 individuos b) 6 000 individuos c) 1 500 individuos

5. El valor de $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}}$ es:

a) 1/3 b) 1 c) 6

6. El valor de $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{6x-1}$ es:

a) e^{-8} b) e^{6} c) e^{-2}

7. Las asíntotas vertical y oblicua de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+5}{3x+6}$ son, respectivamente:

a) $x=-2;\ y=x-2$ b) $x=-2;\ y=x+2$ c) $x=2;\ y=x-2$

8. Los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea continua, son:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1 & \text{si } x<-2\\ ax+5 & \text{si } -2\le x\le 2\\ x^2+b & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

a) $a=1$ y $b=-1$ b) $a=-1$ y $b=-1$ c) $a=-1$ y $b=1$

9. La función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ tiene en $x=2$ una discontinuidad:

a) Evitable b) De primera especie c) De segunda especie

10. La función $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le -1\\ 1-x^2 & \text{si } x>-1\end{cases}$ presenta en $x=-1$ una discontinuidad:

a) Evitable b) De primera especie c) De segunda especie

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

10. Calcula $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ cuando:

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ c) $f(x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

11. Obtén las asíntotas verticales y oblicuas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

12. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x^2-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, represéntala y estudia la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

14. Dibuja la gráfica y escribe las ecuaciones de una función real que cumpla: sea continua en todos los puntos; sea lineal si $x < -3$, cuadrática en el intervalo $[-3, 3]$ y tienda a 0 cuando $x \to +\infty$.

15. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ x+2a & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -x+b & \text{si } 2 < x \end{cases}$, calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

16. En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

– Cartas hasta 20 g de peso: 0,35 euros.

– Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 0,05 euros más.

a) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ (donde x representa el peso de cada carta e y el precio que tenemos que pagar para enviarla), hasta 50 g.

b) Representa gráficamente la función f. Indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

17. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0,2x+3} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función y estudia su continuidad.

b) ¿Cuántas horas debe dedicar a preparar dicho examen para obtener una puntuación de 7,5?

c) Justifica que la puntuación nunca puede superar los 10 puntos.