AUTOEVALUACIÓN

1) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x\le 2 \\ 4x-kx^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

$f(2)=3\cdot 2-2=4$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3\cdot 2-2=4$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4\cdot 2-k\cdot 2^2=4$

$8-4k=4$; $-4k=-4$; $\boxed{k=1} \Rightarrow$ SOL b

2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+4x-21}{x^2-11x+24} = \frac{3^2+4\cdot 3-21}{3^2-11\cdot 3+24} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Ind.

	1	4	-21
3		3	21
	1	7	0

	1	-11	24
3		3	-24
	1	-8	0

$\lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+7)}{\cancel{(x-3)}(x-8)} = \frac{3+7}{3-8} = \frac{10}{-5} = \boxed{-2} \Rightarrow$ Sol a

3) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-a}{x^2-4x-12} = \frac{1}{2}$; $\frac{(-2)^2-a}{(-2)^2-4\cdot(-2)-12} = \frac{1}{2}$; $\frac{4-a}{4+8-12} = \frac{1}{2}$; $\frac{4-a}{0} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Transformemos en indeterminación $\frac{0}{0}$

$4-a=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow$ Vamos a ver si es cierto

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2-4x-12} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x-6)} = \frac{-2-2}{-2-6} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ SI

	1	0	-4
-2		-2	4
	1	-2	0

	1	-4	-12
-2		-2	12
	1	-6	0

Sol $\Rightarrow \boxed{a=4} \to$ Sol b

4) $N(t)=\frac{20+6t^2}{(2t-3)^2}$, t= años transcurridos . $N(t)$ = nº individuos (en miles)

$\lim_{t\to +\infty} N(t) = \frac{20+6t^2}{4t^2-12t+9} = \frac{6}{4} = 1'5 \to 1'5\cdot 1000 = \boxed{1500} \to$ Sol c

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{3-\sqrt{9-x}} = \frac{0}{3-\sqrt{9-0}} = \frac{0}{3-\sqrt{9}} = \frac{0}{3-3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación.

$\lim_{x\to 0} \frac{x(3+\sqrt{9-x})}{(3-\sqrt{9-x})(3+\sqrt{9-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3+\sqrt{9-x})}{3^2-(9-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(3+\sqrt{9-x})}{\cancel{9-9+x}} = \lim_{x\to 0} (3+\sqrt{9-x}) =$

$= 3+\sqrt{9-0} = 3+3 = \boxed{6} \to$ Sol c

6) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{6x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$; $\frac{\infty}{\infty} \to \frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 1}} \to \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{3x+2} = 1 \Rightarrow$ Indeterminación 1^{∞}

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{6x-1} = e^{\lim_{x\to\infty} (6x-1)\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} (6x-1)\left(\frac{\cancel{3x}-2-\cancel{3x}-2}{3x+2}\right)} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} (6x-1)\cdot\left(\frac{-4}{3x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-24x+4}{3x+2}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} \to \frac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 1}} = -\frac{24}{3} = -8$

$\boxed{\text{Sol}: e^{-8}} \to$ Sol a

7) $f(x)=\frac{3x^2+5}{3x+6}$ A.V $\Rightarrow 3x+6=0$; $x=\frac{-6}{3}=-2$ (Compruebo si anula el numerador $\Rightarrow 3\cdot(-2)^2+5\neq 0$)

AV $\to \boxed{x=-2}$

A.O $\to$ Numerador es un grado mayor que el denominador $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rr|l} \cancel{3x^2} & +5 & 3x+6 \\ \cancel{-3x^2} -6x & & \hline x-2 \\ \hline -\cancel{6x}+5 & & \\ \cancel{6x}+12 & & \\ \hline 17 & & \end{array}$$

A.O $\boxed{y=x-2}$ Sol a

8)

(8) $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x < -2 \\ ax+5 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2+b & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Los puntos críticos son $x=-2$ y $x=2$

$f(-2) = a\cdot(-2)+5 = 5-2a$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -3\cdot(-2)+1 = 7$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = a(-2)+5 = 5-2a$

Igualo

$5-2a = 7$; $5-7=2a$

$\boxed{a = \frac{-2}{2} = -1}$

Sol : b

$f(2) = 2a+5$. Como $a=-1$; $f(2) = 2\cdot(-1)+5 = 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2\cdot(-1)+5 = 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2+b = 4+b$

Igualo

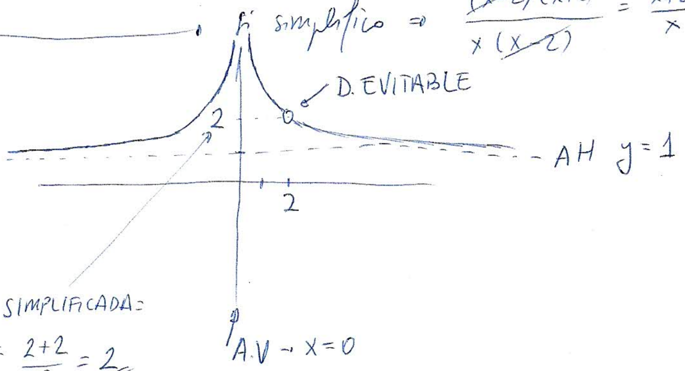
$4+b=3$; $b=3-4=-1$

$\boxed{b=-1}$

(9) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ $\quad f(2) = \frac{2^2-4}{2^2-2\cdot 2} = \frac{4-4}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Evitable}}$ → Sol a

Si simplifico ⇒ $\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x}$ (Podría evitar el 0/0)

x	y
-1	$\frac{-3}{1+2} = -1$
0	$\frac{-4}{0}$ → SALTO
1	$\frac{-3}{-1} = 3$
2	0/0
3	5/3



$f(2) =$ SIMPLIFICADA $= \frac{2+2}{2} = 2$

(10) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ ¿$x=-1$? $\quad f(-1) = -1$

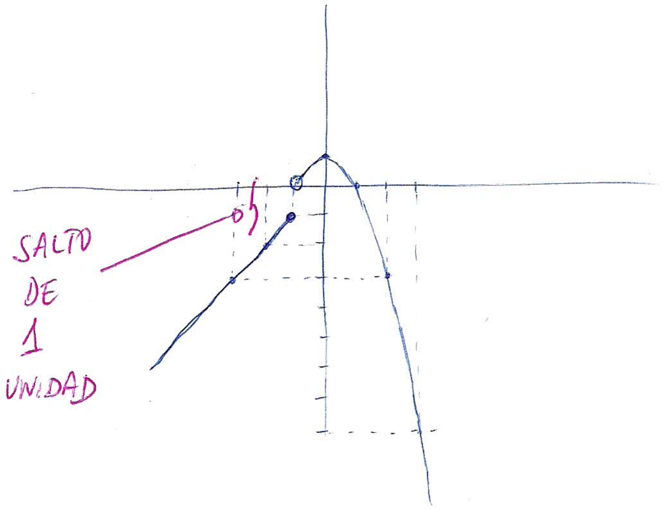
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 1-1 = 0$

Límites laterales existen pero son distintos.

Discontinuidad de 1ª especie de salto finito → SOL b

x	y
-3	-3
-2	-2
-1	→ -1 ; ~~0~~
0	1
1	0
2	-3
3	-8



ACCESO UNIVERSIDAD

10 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

a) $\cancel{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5} = \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ $\dfrac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 1}}$

$\cancel{f(x)} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5} = \dfrac{-\infty}{-\infty} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+5} = \dfrac{\infty}{\infty} = \boxed{0}$ $\dfrac{\text{GRADO 1}}{\text{GRADO 2}}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+5} = \dfrac{-\infty}{\infty} = \boxed{0}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \dfrac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \dfrac{\frac{1}{e^{\infty}}+1}{\frac{1}{e^{\infty}}-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = \boxed{-1}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \dfrac{e^{-(-\infty)}+1}{e^{-(-\infty)}+1} = \dfrac{e^{\infty}}{e^{\infty}} = \boxed{1}$

11 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; A.V $\Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$; $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

Sustituyendo en el numerador (ya que si se anula, es una discontinuidad evitable y no una A.V) $\Rightarrow$ $x=1 \to (1)^3 = 1 \neq 0$
$x=-1 \to (-1)^3 = -1 \neq 0$

$\boxed{\text{A.V} \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}}$

A.O $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$\to$ $\boxed{\text{A.O} \; ; \; y=x}$

12 a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x^2-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

dos puntos donde puede haber problemas es en $x=-1$, $x=3$

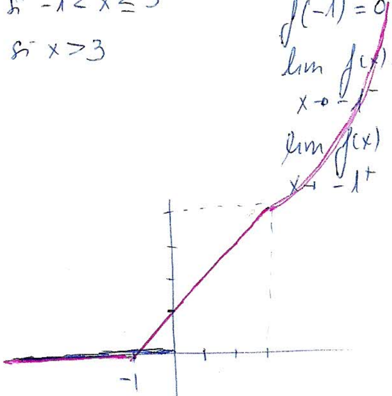
$f(-1) = 0$
$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1+1 = 0$

continua en $x=-1$

$f(3) = 3+1 = 4$
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3+1 = 4$
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3^2-5 = 4$

continua en $x=3$

x	y
-3	0
-2	0
-1	0 ~~0~~
0	1
1	2
2	3
3	4 4
4	11
5	20



b) $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

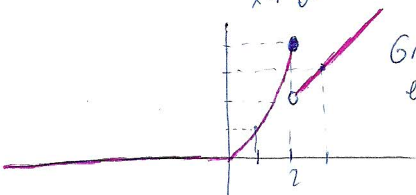
$\to$ Estudiamos en $x=0$

$f(0) = -0^2+2\cdot 0+1 = 1$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^0 = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -0^2+2\cdot 0+1 = 1$

continua en $x=0$

13 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

x	y
-3	0
-2	0
-1	0 0
0	0 0
1	1
2	4 2
3	3
4	4



Gráficamente observamos que es continua en todos los puntos salvo en $x=2$

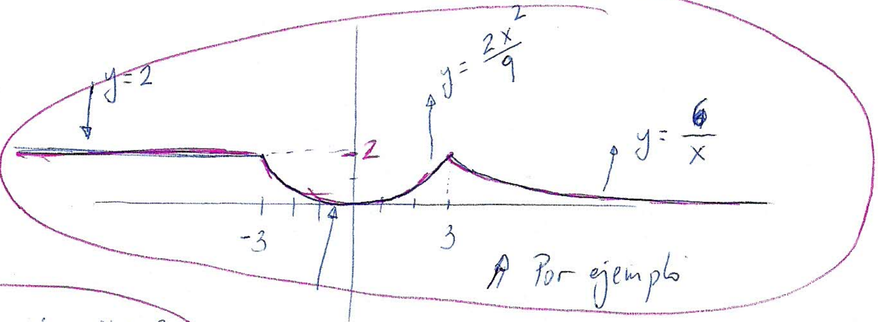
$x=0$ $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^2 = 0 \end{cases}$ continua

$x=1$ $\begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 = 1 \end{cases}$ continua

$x=2$ $\begin{cases} f(2) = 2 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 = 4 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{cases}$ $\to$ Discont.

14

(14) → Continua
lineal si $x < -3$
cuadrática en $[-3,3]$
tiende a 0 si $x \to +\infty$



x	y
-5	2
-4	2
-3	2, 2
0	0
3	2, 2

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<-3 \\ \frac{2x^2}{9} & \text{si } -3\le x\le 3 \\ \frac{6}{x} & \text{si } x>3 \end{cases}$$

(15) $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x<0 \\ x+2a & \text{si } 0\le x\le 2 \\ -x+b & \text{si } 2<x \end{cases}$

Continua en $\mathbb{R}$.

$f(0)=0+2a=2a$
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=e^{a\cdot 0}=e^0=1$
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0+2a=2a$

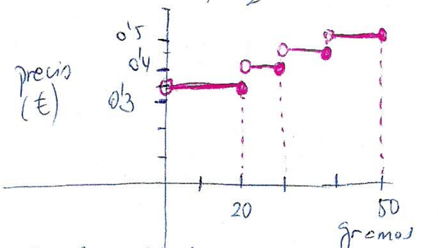
$2a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$

$f(2)=2+2a=2+2\cdot\frac{1}{2}=3$
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$
$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-2+b$

$-2+b=3$
$\boxed{b=5}$

(16) $y=f(x)$
$x \to$ peso
$y \to$ precio (hasta 50 gramos)

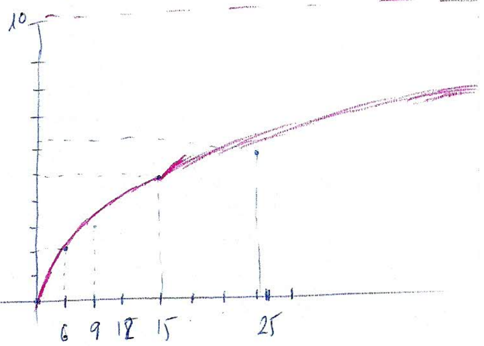
$$f(x)=\begin{cases} 0'35 & \text{si } x\le 20 \\ 0'40 & 20<x\le 30 \\ 0'45 & 30<x\le 40 \\ 0'50 & 40 < x\le 50 \end{cases}$$



Es una función escalonada. Es discontinua (inevitable de salto / 1ª especie) en $x=20$, $x=30$, $x=40$

(17) $P(x)=\begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } 0\le x\le 15 \\ \frac{2x}{0'2x+3} & \text{si } x>15 \end{cases}$

x	y
0	0
6	2
9	3
15	5, 5
25	6'25
$+\infty$	$\frac{2}{0'2}=10$



a) Es continua

b) Para obtener una puntuación de 7'5 miramos la 2ª rama

$\frac{2x}{0'2x+3}=7'5$; $2x=7'5\cdot 0'2x+7'5\cdot 3$; $2x=1'5x+22'5$; $0'5x=22'5$; $x=\frac{22'5}{0'5}=$ $\boxed{=45 \text{ horas}}$

c) Efectivamente. Si estudia infinitas horas, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{2x}{0'2x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{2}{0'2}=10$. puede sacar en teoría, un 10, que sería lo máximo que puede alcanzar.