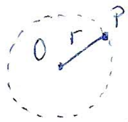
# UNIDAD 6 : CÓNICAS

## 1.- Lugar geométrico (L.G). Ejemplos

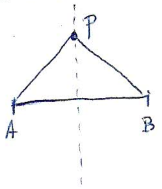
Se llama lugar geométrico (L.G) a un conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad geométrica.

Ej: Circunferencia de centro O y radio r: L.G de los puntos P cuya distancia a O es r.

$\boxed{OP = r}$




Mediatriz de un segmento: L.G de los puntos del plano que equidistan de los extremos A y B.




$\boxed{PA = PB}$

## 2.- Circunferencia

Hemos visto que es un L.G. Si expresamos el punto $P(x,y)$, y el centro $O(a,b)$:

$OP = r \rightarrow$ La distancia entre 2 puntos es el módulo del vector $\vec{OP}$:

$$d(OP) = |\vec{OP}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \xrightarrow{\text{Desarrollo}} x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Haciendo cambios de variable: $\boxed{\begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2+b^2-r^2 \end{cases}}$ $\Rightarrow$ ECUACIÓN CIRCUNFERENCIA $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$

A su vez, de los cambios de variable puedo deducir: $\begin{cases} a = -\frac{A}{2} \\ b = -\frac{B}{2} \\ r = \sqrt{a^2+b^2-C} \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{O\left(-A/2, -B/2\right)}$, $\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2-C}}$

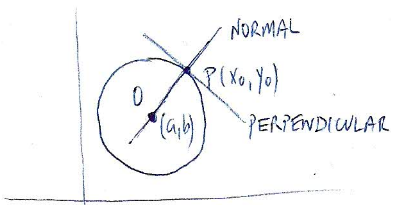
Para que la expresión sea un círculo, el radicando debe ser mayor que 0:

$$\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2-C>0 \Rightarrow \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C>0 \Rightarrow \boxed{A^2+B^2>4C}$$

En el caso de que O sea el origen de coordenadas $\Rightarrow O(0,0) \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=-r^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-r^2=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}$

ECUACIÓN REDUCIDA DE LA CIRCUNFERENCIA

### Ec. recta tangente y normal en un punto de la circunferencia




La pendiente de la recta normal, será la de la recta que pasa por $OP \rightarrow m = \frac{y_0-b}{x_0-a}$.

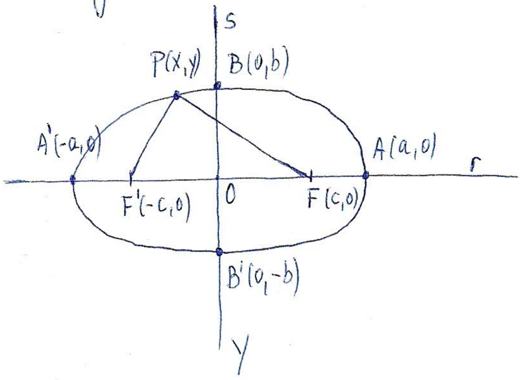
La pendiente de la tangente, como es perpendicular a la normal:

$$m \cdot m' = -1; \quad m' = -\frac{x_0-a}{y_0-b}$$

Ec. recta tangente: $\boxed{y-y_0 = -\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)}$

Ec. recta normal: $\boxed{y-y_0 = \frac{y_0-b}{y_0-a}(x-x_a)}$

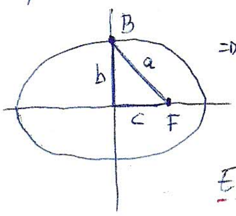
3.- Elipse: Dados 2 puntos fijos F y F', y una distancia fija K, el L.G de los puntos P cuya suma de distancias a F y F' es K, se llama Elipse $\Rightarrow$ $\boxed{PF + PF' = K}$




Supongamos, que el centro O (0,0) $\Rightarrow$ Para facilitar cálculos.

Elementos
- Focos: F(c,0) y F'(-c,0)
- Ejes de Simetría: Ejes de coordenadas
- Centro: O (0,0)
- Vértices: A(a,0), A'(-a,0), B(0,b) y B'(0,-b)
- Eje Mayor: segmento $AA' = 2a$
- Eje Menor: segmento $BB' = 2b$
- Distancia Focal: segmento $FF' = 2c$

- Si el punto P, lo situamos en A observamos que $AF + AF' = K$ $\rightarrow$ se observa que $\boxed{K = 2a}$
- Si el punto P lo situamos en B $\rightarrow$ $BF + BF' = K = 2a$. Como $BF = BF'$ $\Rightarrow$ $2BF = 2a$ $\Rightarrow$ $\boxed{BF = a}$




$\Rightarrow$ Se observa un T. rectángulo, donde por Pitágoras podemos relacionar a, b y c $\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Ecuación $PF + PF' = K \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ $\rightarrow$ Ecuación con radicales

Si elevamos los 2 miembros al cuadrado (para quitar raíces) $\Rightarrow$ $(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$. Como $a^2 - c^2 = b^2$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\Rightarrow$ Dividiendo por $a^2b^2$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ * $\rightarrow$ Ecuación reducida de la elipse. (de eje mayor OX)

Excentricidad Elipse: Es un valor que nos indica si la elipse está poco o muy achatada.

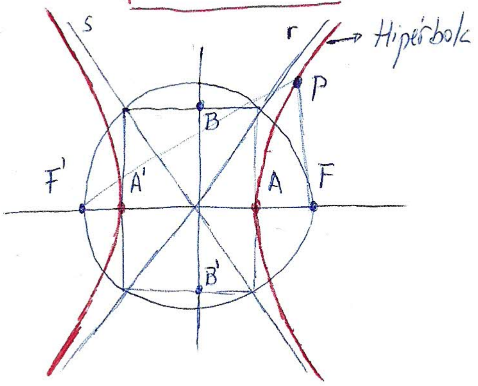
$\boxed{e = \dfrac{c}{a} \quad , \quad 0 < e < 1}$

(Si el eje mayor está en OY $\rightarrow$ $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$)

4.- Hipérbola: Dados 2 puntos fijos F y F', focos y una distancia fija K, el L.G de los puntos P cuya diferencia de distancias a F y F' (o a F' y F) es igual a K, se llama Hipérbola.

$\boxed{|PF - PF'| = K}$

Usaremos la misma nomenclatura que la Elipse:




Elementos
- Focos: F(c,0) y F'(-c,0)
- Ejes de Simetría: Ejes de Coordenadas
- Centro: O (0,0)
- Eje Real o Mayor: segmento $AA' = 2a$
- Eje Imaginario o Menor: segmento $BB' = 2b$
- Vértices: A y A'
- Asíntotas: Rectas r y s $\begin{cases} r: y = \dfrac{b}{a}x \\ s: y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases}$

Si tomamos como punto P el vértice A:

$|AF - AF'| = \boxed{K = 2a}$

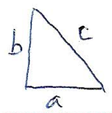
Ecuación $\Rightarrow$ $|PF - PF'| = 2a$ $\Rightarrow$ $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$ $\longrightarrow$ Desarrollando $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ * $\rightarrow$ Ec. reducida de eje real OX

Si el eje real es OY $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

**Hipérbola Equilátera**: Es aquella que tiene iguales sus 2 semiejes. $\Rightarrow a=b$

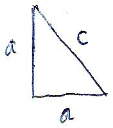
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \boxed{x^2-y^2=a^2}$$

Sus asíntotas son las rectas $\boxed{y=x \ , \ y=-x}$. En este caso, la relación entre a, b y c es:




$\rightarrow$ como $a=b$

$\boxed{c^2=b^2+a^2}$



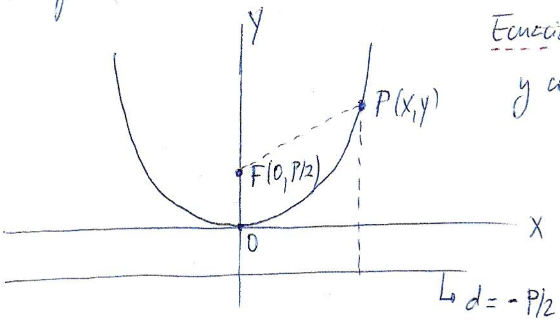

$\Rightarrow c^2=2a^2 \rightarrow c=a\sqrt{2}$

y su excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$

**5. Parábola**: Dado un punto fijo F, (Foco) y una recta d, que llamaremos directriz, la parábola es el LG de los puntos del plano que equidistan de F y de d.

$\boxed{PF=Pd}$

Antes de ver la parábola como LG, debemos recordar que la expresión $y=ax^2+bx+c$ representa la función cuadrática asociada a una parábola.




Ecuación reducida: Consideramos la parábola con eje de simetría OY, y con vértice O(0,0).

Supongamos F en un punto que llamaremos $(0, P/2)$

$\boxed{F(0, P/2)}$, y d, recta paralela a OX $\rightarrow$ $\boxed{d: y=-P/2}$

$PF=Pd$

$$\sqrt{x^2+(y-P/2)^2}=\left|\frac{y+P/2}{\sqrt{0^2+1^2}}\right|$$

Distancia de un punto a una recta.

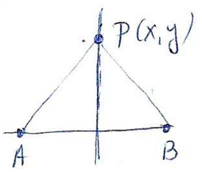
Elevando al cuadrado, y desarrollando $\rightarrow$ $\boxed{x^2=2Py}$

$\boxed{P}$ $\rightarrow$ Distancia foco a la directriz.

$\boxed{Fd=P}$

## Ejercicios Resueltos

1) Encontrar la ecuación de la mediatriz que pasa por el segmento $\overline{AB}$, donde $A(-1,0)$ y $B(3,2)$.

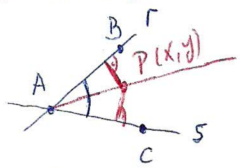



$$d(AP)=d(BP) \rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \rightarrow (\quad)^2=(\quad)^2$$

$$(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4$$

$$\boxed{8x+4y-12=0}$$

2) Halla la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ si $A(1,2)$, $B(-2,5)$ y $C(3,-3)$




La bisectriz es la recta que divide al ángulo en 2 partes iguales. Es decir, LG de los puntos del plano que equidistan de 2 rectas secantes. $\rightarrow d(P,r)=d(P,s)$

Para resolver el ejercicio, calculo las rectas que pasan por A y B (r), y la que pasa por A y C (s).

Después, hallo los puntos que equidistan de ellas.

1) Recta $s$

$A(1,2)$ $\rightarrow y = mx + n$ $\begin{cases} 2 = m + n \\ -3 = 3m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = -5/2 \\ n = 9/2 \end{cases}$ $\Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 2y = -5x + 9;$

$C(3,-3)$

$5x + 2y - 9 = 0$

Recta $r$

$A(1,2)$ $\rightarrow y = mx + n$ $\begin{cases} 2 = m + n \\ 5 = -2m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = -1 \\ n = 3 \end{matrix} \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

$B(-2,5)$

$$\left| \frac{5x + 2y - 9}{\sqrt{5^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{x + y - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| \Rightarrow 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 9\sqrt{2} = \sqrt{29}x + \sqrt{29}y - 3\sqrt{29}$$

$$\boxed{(\sqrt{29} - 5\sqrt{2})x + (\sqrt{29} - 2\sqrt{2})y + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{29} = 0}$$

3) Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $O(-3,5)$ y $r = 4$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $\begin{cases} A = -2a & \rightarrow A = 6 \\ B = -2b & B = -10 \\ C = a^2 + b^2 - r^2 & C = 9 + 25 - 16 = 18 \end{cases}$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0}$$

4) Halla el centro y radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

$A = -8 \Rightarrow a = -\frac{A}{2} = 4$ ; $B = 2 \Rightarrow b = -\frac{B}{2} = -1$ ; $r = \sqrt{a^2 + b^2 - C} = \sqrt{16 + 1 - 10} = \sqrt{7}$

$\boxed{O(4,-1)}$
$\boxed{r = \sqrt{7}}$

5) Halla ecuación y excentricidad de la elipse, de vértices $A(8,0)$, $A'(-8,0)$, $B(0,3)$, $B'(0,-3)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a = 8, \; b = 3 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1}$

$e = \frac{c}{a}$ ; $c^2 = a^2 - b^2$ ; $c = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55} = 7'42 \rightarrow e = \frac{7'42}{8} = 0'93$

6) En una hipérbola, la distancia entre vértices es 8. Si $B(0,3)$ y $B'(0,-3)$, halla sus focos.
Los vértices son A y A'. Si $d(AA') = 8$, y por simetría, las coordenadas de los ~~focos~~ vértices son

$\boxed{A(4,0) \text{ y } A'(-4,0)}$ (vértices). Como me dice coordenadas de F y F' y como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \boxed{F(5,0) \text{ y } F'(-5,0)}$ (Focos)

7) Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y $F(0,6)$

$x^2 = 2py$. Hay que calcular el parámetro $p$. $\Rightarrow F(0, p/2) \Rightarrow p/2 = 6$ ; $p = 12$

$x^2 = 2 \cdot 12 \cdot y$ ; $\boxed{x^2 = 24y}$

# AUTOEVALUACIÓN

1. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al eje $OX$ es doble de la distancia al eje $OY$ es:

a) $x = 2y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 2$

2. La ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(8, 2)$, $B(-1, 5)$, y $C(3, -3)$, es:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 12 = 0$

3. La excentricidad de la elipse de ecuación $25x^2 + 169\,y^2 = 4\,225$ es:

a) 2,4 b) 0,92 c) 0,38

4. La ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (12, 0) y una de cuyas asíntotas es la recta $3x - 4y = 0$ es:

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{81} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{81} = 1$

5. La cónica de ecuación $y^2 = 2x + 4y - 10$ tiene por foco el punto:

a) $F(4, 2)$ b) $F(2, 4)$ c) $F(2, 2)$

6. ¿Qué posición tiene la recta $3x + 4y = 31$ respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$?

a) Secante b) Tangente c) Exterior

7. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos (6, 0) y (–6, 0) es 20 unidades es:

a) $16x^2 - 25y^2 = 1\,600$

b) $x^2 + y^2 = 400$

c) $16x^2 + 25y^2 = 1\,600$

8. La parábola de foco (–2, 0) y directriz $y = 2$ tiene por ecuación:

a) $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$

b) $y^2 - 2y + 4x + 9 = 0$

c) $x^2 + 4x + 4y = 0$

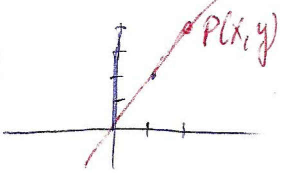
9. La circunferencia tangente a la recta $x = 2$ en el punto (2, 6) y que pase por el punto (4, 4), tiene por centro el punto:

a) (4, 6) b) (4, 8) c) (6, 4)

10. La hipérbola de ecuación $xy = 18$ tiene por tangente en el punto de abscisa –2 la recta de ecuación:

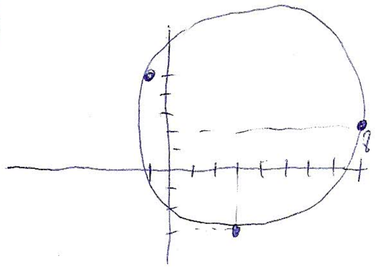
a) $9x - 2y + 36 = 0$ b) $9x + 2y + 36 = 0$ c) $9x - y + 9 = 0$

## RESOLUCIÓN

① 


$d(P, OX) = d(P, OY) \cdot 2$ $\qquad$ $OX \Rightarrow y=0$ $\qquad$ $OY \Rightarrow x = 0$

$$\left|\frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}}\right| = 2\left|\frac{x}{\sqrt{1^2+0^2}}\right| \Rightarrow y = 2x \rightarrow \underline{\underline{b}}$$

② 

Ec circunferencia $\Rightarrow$ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ → si conozco A, B y C quedará definida:

$$\begin{array}{l} A(8,2) \rightarrow \\ B(-1,5) \rightarrow \\ \phantom{x} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 64+4+8A+2B+C=0 \\ 1+25-A+5B+C=0 \\ 9+9+3A-3B+C=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 8A+2B+C=-68 & ① \\ -A+5B+C=-26 & ② \\ 3A-3B+C=-18 & ③ \end{array} \right.$$

$① - ② \Rightarrow 9A - 3B = -42 \xrightarrow{\times 5} 45A - 15B = -210$

$① - ③ \Rightarrow 5A + 5B = -50 \xrightarrow{\times 3} 15A + 15B = -150$

$60A = -360 \Rightarrow A = -6$

$-30 + 5B = -50$ ; $5B = -20$ ; $B = -4$

$3(-6) - 3(-4) + C = -18$ ; $C = -18 + 18 - 12 = -12$

$$\boxed{x^2+y^2-6x-4y-12=0} \rightarrow \underline{\underline{a}}$$

③ $25x^2 + 169y^2 = 4225 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; $\frac{25x^2}{4225} + \frac{169y^2}{4225} = \frac{4225}{4225} \Rightarrow \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

$e = \frac{c}{a}$ ; $a^2 = b^2 + c^2$ ; $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{169-25} = 12$

$e = \frac{12}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13} = \boxed{0'92} \rightarrow \underline{\underline{b}}$

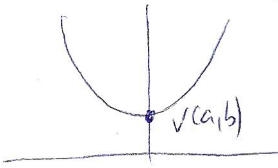
④ Asíntota $3x - 4y = 0$ ; $y = \frac{3}{4}x$ ; $y = \frac{b}{a}x \Rightarrow \begin{array}{l} b=3 \\ a=4 \end{array}$ (o cualquier fracción equivalente)

Por otra parte: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow (12,0) \Rightarrow \frac{12^2}{a^2} - 0 = 1$ ; $a^2 = 12^2 \Rightarrow a = 12$

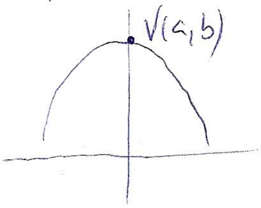
$\frac{b}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1} \rightarrow c$

⑤ $y^2 = 2x + 4y - 10$

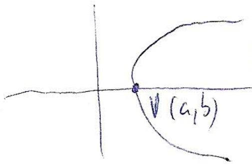
Una parábola cuyo vértice no es (0,0), puede tener estas expresiones (vértice (a,b)):



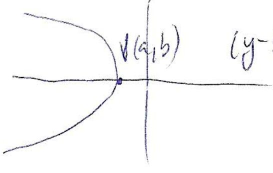

$(x-a)^2 = 2p(y-b)$




$(x-a)^2 = -2p(y-b)$




$(y-b)^2 = 2p(x-a)$




$(y-b)^2 = -2p(x-a)$

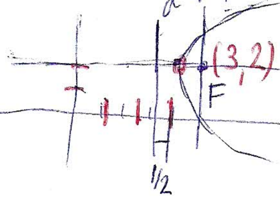
Por la fórmula que nos dan, vamos a probar:

$(y-b)^2=2p(x-a) \Rightarrow y^2-2by+b^2=2px-2pa$ ;

$y^2-2by-2px+b^2+2pa=0$ . La comparamos con $y^2=2x+4y-10$

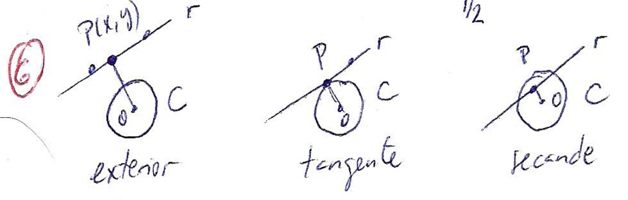
$y^2-4y-2x+10=0 \rightarrow p=1$ ; $b=2 \rightarrow 2^2+2\cdot1\cdot a=10$ ; $a=3$

V(3,2)




$\rightarrow F(3+0'5,2)$ ; $F(3'5,2)$ → No corresponde con ninguna

(6)



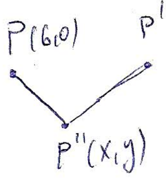

$d(r,O)>r$ $\quad d(r,O)=r \quad d(r,O)<r$

$x^2+y^2-4x-21=0 \rightarrow$ Calculo O y r $\quad O(-A/2,-B/2)=(2,0)$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad r=\sqrt{2^2+0^2-(-21)}=5 \qquad$ · Si $r: 3x+4y-31=0$

$d(O,r)=\left|\dfrac{3\cdot2+4\cdot0-31}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\dfrac{25}{5}$ ; $25/5=5 \rightarrow \boxed{\text{Tangente} = b}$

(7)




$\sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{(x+6)^2+y^2}=20 \rightarrow (\quad)^2=(20)^2$

$x^2-\cancel{12x}+36+y^2+x^2+\cancel{12x}+36+y^2+2\sqrt{[(x-6)^2+y^2][(x+6)^2+y^2]}=400$

$2\sqrt{\quad}=328-2x^2-2y^2$ ; $\sqrt{\quad}=164-x^2-y^2$

$(\quad)^2=(\quad)^2$ ; $[(x-6)^2+y^2][(x+6)^2+y^2]=(164-x^2-y^2)^2$

$(x-6)^2(x+6)^2+(x-6)^2y^2+(x+6)^2y^2+y^4=y^4+x^4+2x^2y^2-328x^2-328y^2+26896$

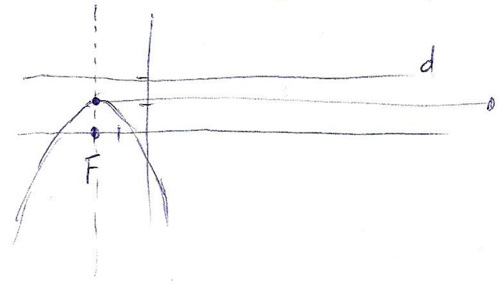
$\cancel{x^4}+\cancel{12x}-72x^2+1296+\cancel{x^2y^2}-\cancel{12xy^2}+36y^2+\cancel{x^2y^2}+\cancel{12xy^2}+36y^2+\cancel{y^4}=\cancel{y^4}+\cancel{x^4}+\cancel{2x^2y^2}$

$-328x^2-328y^2+26896$

$-72x^2+72y^2+328x^2+328y^2=26896-1296$

$256x^2+400y^2=25600 \quad :16 \quad \boxed{16x^2+25y^2=1600} \rightarrow$ c

(8)



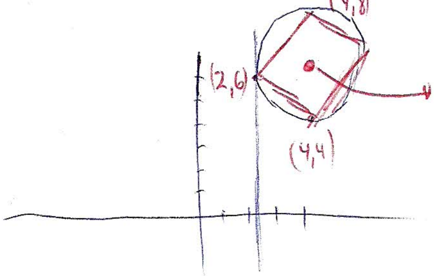

V(-2,1) $\quad (x-a)^2=-2p(y-b)$

$p=2 \quad (x+2)^2=-2\cdot2(y-1)$

$x^2+4x+\cancel{4}=-4y+\cancel{4}$

$\boxed{x^2+4x+4y=0} \Rightarrow$ a

(9)




$\rightarrow C = (4,6) \Rightarrow$ Por simetría.

$\rightarrow$ a

(10) Hipérbola $xy = 18$. En $x = -2$ tiene por tangente:

Esta forma de dar la ecuación de una hipérbola, es sustituyendo los ejes de coordenadas por las asíntotas (en las hipérbolas equiláteras):

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow x \cdot y = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 18 ; \quad a^2 = 36 ; \quad a = 6$$

$$x^2 - y^2 = 36$$

Ec. tangente $\Rightarrow y - y_0 = \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$ . Como es equilátera $\rightarrow a = b \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

$x_0 = -2 \rightarrow y_0 = \sqrt{-32} \Rightarrow$ Sin solución